CS381: Numerical Computation & Softwares

Spline Interpolation

Jakramate Bootkrajang

Department of Computer Science

Chiang Mai University

Implementing cubic spline

Cubic spline (1/2)

กำหนด $\{t_0, \ldots, t_n\}$ เป็นเซตของ knots $n+1$ ตัว cubic spline คือเซตของพนุนามดีกรี 3

$$
s(x) = \begin{cases} s_0(x) & , \quad x \in [t_o, t_1) \\ s_1(x) & , \quad x \in [t_1, t_2) \\ & \vdots \\ s_n(x) & , \quad x \in [t_{n-1}, t_n] \end{cases}
$$

Cubic spline (2/2

โดยเมื่อนิยาม $h_i = t_{i+1} - t_i$ พนุนามดังกล่าวจะคือ

$$s_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$$

To interpolate the data (1/2)

เมื่อเราต้องการ interpolate ข้อมูลซึ่งอยู่ในรูปคู่อันดับ x, y โดยใช้ cubic spline $s_i(x) =$ $\frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$

- เราจำเป็นจะต้องตามหา $s_i(x)$ ให้ครบทุกตัว
- จากสมการของ $s_i(x)$ เราจะทราบค่าของตัวแปรต่อไปนี้ในทันที
  - t_i เนื่องจากผู้ใช้เป็นคนกำหนด knots
  - h_i เพราะคำนวณได้จาก t_i
  - x คือจุดที่เราต้องการทราบค่า $f(x)$

To interpolate the data (1/2)

- เรายังไม่ทราบค่า Z
- แต่เราสามารถหาได้จากระบบสมการ $H * Z = Y$ นั่นคือ $Z = H^{-1} * Y$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & \\
\frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \frac{h_{n-3}}{6} & \frac{h_{n-3}+h_{n-2}}{3} & \frac{h_{n-2}}{6} \\
 & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\
\frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\
\vdots \\
\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2}-y_{n-3}}{h_{n-3}} \\
\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}}
\end{bmatrix}
$$

Constructing matrix H

- เราเรียก matrix แบบนี้ว่า tridiagonal matrix
- เส้นแทยงมุมล่างสุดเรียกว่า lower diagonal บนสุดเรียก upper diagonal และตรงกลาง diagonal

$$\begin{bmatrix} \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{h_{n-3}}{6} & \frac{h_{n-3}+h_{n-2}}{3} & \frac{h_{n-2}}{6} \\ & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} \end{bmatrix}$$

Using `tridiagonal()` to construct a tridiagonal matrix

```
du = [3, 3, 3, 3] # upper diag elements
dd = [1, 1, 1, 1, 1] # main diag elements
dl = [2, 2, 2, 2] # lower diag elements
# building tridiagonal matrix
H  = Tridiagonal(dl, dd, du)
```

เราสามารถใช้ฟังก์ชันดังกล่าวสร้าง matrix H ได้ (สังเกตว่า upper และ lower diagonal ของ H มีค่าเท่ากัน)

How about matrix Y ?

Y เป็น matrix $n \times 1$ หรือมองเป็น vector ได้ สามารถสร้างโดยกำหนดเวคเตอร์ขนาด n มาก่อน แล้วเติมค่าแต่ละตัวลงไปโดยใช้ `for loop`

$$\begin{bmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} - \frac{y_{n-2} - y_{n-3}}{h_{n-3}} \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

Once H and Y are calculated

- เราจะสามารถหาค่าของ Z ได้โดยเรียกใช้คำสั่ง `Z = inv(H) * Y`
  - `inv()` คือฟังก์ชันที่ใช้หา inverse ของ matrix
- Z ที่ได้จะอยู่ในรูปของ vector
- โดยที่ `Z[1]` ก็คือค่าของ z_1 เป็นต้น
- เมื่อเราทราบค่าของ Z เราก็จะสามารถกลับไปคำนวณค่าของ $s_i(x)$ ได้ทันที

คำแนะนำ

- ต้องไม่สับสนว่า index ในสมการจะเริ่มจาก 0 ส่วน index ของโปรแกรม Julia จะเริ่มจาก 1
- เราไม่จำเป็นจะต้องนิยาม $s_i(x)$ หลายตัวตามสมการ แต่สามารถนิยาม $s(x)$ เพียงครั้งเดียว แต่เพิ่ม parameter i เข้าไปในฟังก์ชัน เพื่อระบุว่าจะใช้ t_i, z_i, h_i, y_i ตัวไหนในการคำนวณ $s(x, i, \dots) = \frac{z[i+1]}{6h[i]}(x - t[i])^3 + \frac{z[i]}{6h[i]}(t[i+1] - x)^3 + \left(\frac{y[i+1]}{h[i]} - \frac{z[i+1]h[i]}{6}\right)(x - t[i]) + \left(\frac{y[i]}{h[i]} - \frac{z[i]h[i]}{6}\right)(t[i+1] - x)$