CS381: Numerical Computation & Softwares

System of linear equations

Jakramate Bootkrajang

Department of Computer Science

Chiang Mai University

Introduction

- ในบทนี้เราจะศึกษาการแก้ระบบสมการเชิงเส้น
- ระบบสมการเชิงเส้นพบได้บ่อยในหลายปัญหาในชีวิตจริง

Example

- สมมุติว่าวันนี้เป็นวันหยุด ร้านอาหารปิดหมด เรามีอาหารอยู่ในตู้เย็น 3 อย่างคือ

Food	Calories	Protein	Fat
Cereal	120	4	2
Mama	130	3	5
Bread	105	1	2

- แต่เราคุมน้ำหนักอยู่ จำเป็นจะต้องได้แคลอรี่ 245 โดยได้จากโปรตีน 6 กรัม และจากไขมัน 7 กรัม
- คำถามคือ เราจะต้องกินอาหารเหล่านี้อย่างละเท่าไร

Example

- หากเราให้ c คือจำนวนซีเรียลที่เรากิน m แทนจำนวนมาม่า และ b แทนจำนวนขนมปัง
- เราสามารถสร้างระบบสมการได้ว่า

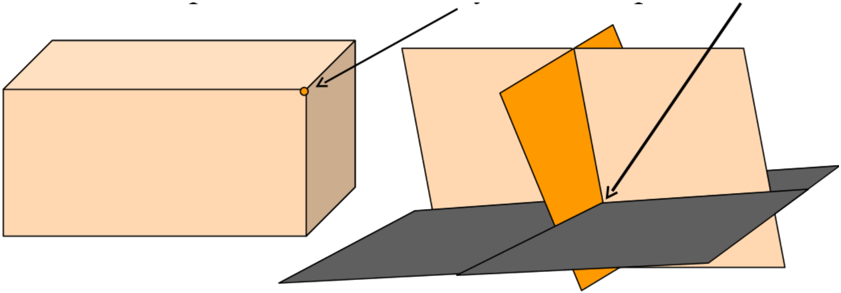
$$
\begin{aligned}
120c + 130m + 105b &= 245 \\
4c + 3m + 1b &= 6 \\
2c + 5m + 2b &= 7
\end{aligned}
$$

- เกิดเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย 3 สมการ และมีตัวไม่ทราบค่า 3 ตัว

Geometrically

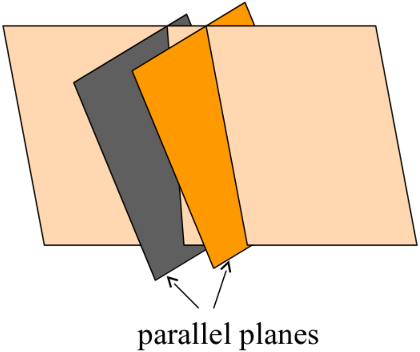
- หากเรามองในเชิงเรขาคณิตจะพบว่า ระบบสมการข้างต้นเป็นการตัดกันของระนาบ 3 ตัว
- ที่ทั้ง 3 ระนาบอาจตัดกันได้ 3 แบบดังต่อไปนี้

1. มีคำตอบเดียว



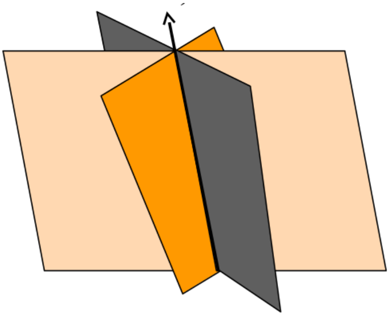
Geometrically

2 ไม่มีคำตอบ



Geometrically

3 มีหลายคำตอบ



In a matrix form

- จากตัวอย่าง

$$120c + 130m + 105b = 245$$
$$4c + 3m + 1b = 6$$
$$2c + 5m + 2b = 7$$

- เราสามารถเขียนในรูปของ matrix ได้

$$\begin{bmatrix} 120 & 130 & 105 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} c \\ m \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 245 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Problem definition

- กำหนดเมทริกซ์ $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, เวคเตอร์ $b \in \mathbb{R}^n$ และจำนวนเต็ม $m, n \in \mathbb{N}$
- เราต้องการหาค่า x ที่ทำให้ระบบ $Ax = b$ เป็นจริง
- จากความรู้ทาง linear algebra เราทราบว่า
  - ถ้า $m = n$ และ A สามารถหา inverse ได้ $x = A^{-1}b$ (ช้าและไม่แม่นยำ)
  - ถ้า $m > n$ เราจะเรียกว่า overdetermined system อาจหาคำตอบไม่ได้ หรือมีคำตอบหากสมการบางส่วนมีความสัมพันธ์เชิงเส้นต่อกัน
  - ถ้า $m < n$ เราจะเรียกว่า underdetermined system อาจมีหลายคำตอบ

Solving LSE

- ในที่นี้เราจะศึกษากรณีแรกคือ A เป็นเมทริกซ์จตุรัส (แถว = หลัก)
- เราอาจสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นได้เพียงแค่หา inverse ของ A ให้ได้แล้วนำไปคูณเข้ากับเวคเตอร์ b
- แต่วิธีดังกล่าวช้าและไม่แม่นยำ เราจะได้ศึกษาเปรียบเทียบวิธีในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นในคาบปฏิบัติการ
- โดยภาพรวมแล้วการแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบ่งออกเป็น 2 แนวทางคือ
  - Direct method: หาคำตอบโดยตรง เหมาะกับเมทริกซ์ A ขนาดไม่ใหญ่มาก เช่นวิธี Gaussian elimination
  - Iterative method: หาคำตอบโดยประมาณแล้วพยายามปรับปรุงคำตอบให้ดีขึ้นเรื่อยๆ เหมาะกับเมทริกซ์ A ขนาดใหญ่ เช่นวิธี Gauss-Seidel method

Gaussian elimination

1. Forward elimination คือการจัดเมทริกซ์ A ในอยู่ในรูป upper diagonal matrix โดยใช้ elementary operations

$$\begin{bmatrix} 120 & 130 & 105 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \tag{1}$$

2. Backward substitution คือการ solve หาค่าตัวแปรทีละตัวเริ่มจากตัวแปรตัวสุดท้าย

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ i \\ j \end{bmatrix} \tag{2}$$

for example $\quad x_3 = j/f$

Elementary opertations

1. การคูณตัวเลขที่มากกว่า 0 เข้ากับสมการใดๆ
2. การบวกสมการใดๆเข้าด้วยกัน

Example

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- ลบสองเท่าของสมการ 1 ออกจากสมการ 2 และสามเท่าของสมการ 1 ออกจากสมการ 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ -17 \end{bmatrix}$$

Example

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & -7 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ -17 \end{bmatrix}$$

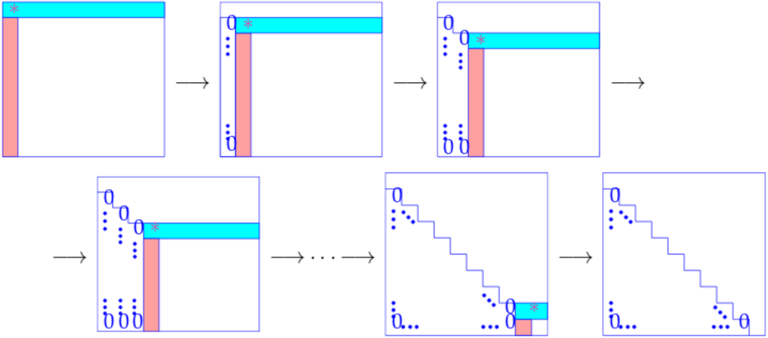
- บวกห้าเท่าของสมการ 2 เข้ากับสมการ 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

- Backward substitution ให้ผลลัพธ์คือ $x_3 = 1,\ x_2 = 2,\ x_1 = 1$

In picture

- จุดดอกจันเรียกว่า pivot
- แถวสีฟ้าเรียกว่า pivot row



So: forward elimination procedure

- ในการแปลง $Ax = b$ เป็น $A'x = b'$
- สำหรับ pivot row $\vec{a}_k$ และ a_{ij} (สมาชิกแถวที่ i หลักที่ j)

$$a'_{ij} = \begin{cases} a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} a_{kj} & \text{for } k < i, j \leq n \\ 0 & \text{for } k < i \leq n, j = k \\ a_{ij} & \text{else} \end{cases}$$

$$b'_i = \begin{cases} b_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} b_k & \text{for } k < i \leq n \\ b_i & \text{else} \end{cases}$$

So: backward substitution procedure

$$x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a_{n-2,n}x_n - a_{n-2,n-1}x_{n-1}}{a_{n-2,n-2}}$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}x_j}{a_{i,i}}$$

Problems with standard Gaussian elimination

- อาจไม่สามารถใช้งานได้เมื่อจุด pivot เป็น 0

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

- อาจได้คำตอบที่คลาดเคลื่อนเมื่อจุด pivot มีค่าน้อยๆ (numerical error) (see Page 160 by R. Hiptmair)

$$\begin{bmatrix} 10^{-10} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix}$$

How to avoid the problems

- ถ้ามีเลขศูนย์อยู่บน pivot ให้สลับแถวของเมทริกซ์ A ใหม่ให้ไม่มี zero pivot
- เลือกแถวที่จะเอามาทำเป็น pivot row โดยใช้แนวทาง partial pivoting ดังนี้
  1. หาค่าสูงสุดของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในแถวนั้นๆ ให้ชื่อว่า $S_i, i = 1 \ldots n$
  2. คำนวณ ratio โดยนำค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกทุกตัวใน column ที่กำลังจะทำการ eliminate หารด้วย S_i ของแถวตน
  3. เลือกแถวที่มี ratio สูงสุดมาเป็น pivot row

Partial pivoting example

หาสมาชิกที่มีค่าสัมบูรณ์สูงสุดภายในแถว

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Partial pivoting example

คำนวณ ratio เพื่อที่จะทำการ eliminate ใน column แรก พบว่า ratio ของแถวสุดท้ายมีค่าสูงสุด

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$ratio_{row1} = \frac{1}{2}, ratio_{row2} = \frac{3}{4}, ratio_{row3} = \frac{5}{8}, ratio_{row4} = \frac{4}{5}$$

Partial pivoting example

ทำการ eliminate ครั้งแรก

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 8 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

First pivot equation

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -2.75 & 1.75 \\ 0 & 5.5 & -0.25 & -0.75 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \\ 2.25 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Partial pivoting example

คำนวณ ratio เพื่อที่จะทำการ eliminate ใน column ที่สองต่อไป ทั้งนี้ให้ใช้ค่า S_i เดิมที่หาได้ตั้งแต่ต้น พบว่าเราควรใช้แถวที่ 1 เป็น pivot row

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0.5 & -2.75 & 1.75 \\ 0 & 5.5 & -0.25 & -0.75 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1.75 \\ 2.25 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$ratio_{row1} = \frac{1.5}{2}, ratio_{row2} = \frac{0.5}{4}, ratio_{row3} = \frac{5.5}{8},$$

Partial pivoting example

ได้ผลลัพธ์หลังการทำ eliminate เป็น

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & \boxed{-2.5 \quad 1.8333} & \\ 0 & 0 & 0.25 & 1.6667 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 6.8333 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Partial pivoting example

เมื่อสิ้นสุดการทำ forward elimination เราได้เมทริกซ์ดังนี้ ซึ่งสามารถนำไปทำ backward substitution ต่อได้

$$\begin{bmatrix} 0 & -1.5 & 0.75 & 0.25 \\ 0 & 0 & -2.5 & 1.8333 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 2.1667 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

How to determine if solution is good ?

- เราสามารถหาผลต่างของ Ax กับ b ดูได้โดยกำหนดให้ residue เป็น

$$R = Ax - b \tag{3}$$

- เนื่องจาก Ax และ b เป็นเวคเตอร์ R ก็เป็นเวคเตอร์ด้วย โดยค่า r_i แสดงผลต่างของ x_i กับ b_i
- ทั้งนี้เราจะยอมรับคำตอบที่ได้จาก algorithm เมื่อ

$$\max_i |r_i| \leq \epsilon \tag{4}$$

สำหรับค่า ϵ ที่เรากำหนดไว้ล่วงหน้า

Iterative method

Iterative method

- สังเกตว่าวิธี direct method อย่าง Gaussian elimination มุ่งหาคำตอบโดยหา A', b' ที่สามารถนำไปใช้หา x ได้โดยตรง
- วิธีดังกล่าวอาจใช้เวลาในการคำนวณนานหาก A มีขนาดใหญ่
- จึงมีแนวคิดที่จะหาคำตอบ x โดยคร่าวก่อน แล้วค่อยปรับปรุงคำตอบที่ได้ให้ดีขึ้นเรื่อยๆ
- เราเรียกวิธีที่ปรับปรุงคำตอบไปเรื่อยๆว่า iterative method
- ในวิชานี้เราจะมารู้จักวิธี iterative method ที่มีชื่อว่า Gauss-Seidel method

Iterative method

หลักการพื้นฐานของวิธี iterative method

- แก้สมการแต่ละสมการเพื่อหาค่าของ x_i
  - ค่าดังกล่าวอาจติดตัวแปรไม่ทราบค่าอื่นๆ แต่ไม่เป็นไร
- กำหนดค่าเริ่มต้นของ x_i โดยการเดาสุ่ม
- นำค่าที่เดาสุ่มมาใช้เพื่อหาค่าของ x_i
- ค่า x_i ใหม่ที่ได้จะเข้าใกล้กับคำตอบที่แท้จริงมากขึ้นเรื่อยๆ เราอาจหยุดปรับปรุงค่า x_i เมื่อคำตอบที่ได้ไม่ต่างจากคำตอบในรอบที่แล้วมากนัก

Gauss-Seidel method

- กำหนดสมการเริ่มต้น

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_ns
\end{aligned}
$$

- สำหรับสมการที่ i เราจะแก้สมการเพื่อแยก x_i ให้อยู่ฝั่งซ้าย ส่วนพจน์ที่เหลือให้ย้ายไปฝั่งขวาให้หมด

Gauss-Seidel method

- เราจะได้ผลลัพธ์เป็น

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\
x_2 &= \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}}{a_{nn}}
\end{aligned}
$$

Gauss-Seidel method

- หรือสามารถเขียนสรุปได้เป็น สำหรับสมการที่ i ใดๆ เราจะได้ x_i มีค่าเท่ากับ

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}} \quad \text{for} \quad i = 1, \ldots, n$$

When to stop ?

- เราสามารถหยุดการปรับปรุงค่า x_i เมื่อค่าเดิมกับค่าใหม่มีค่าต่างกันน้อยกว่า threshold ที่กำหนดไว้ล่วงหน้า
- ค่าดังกล่าวอาจวัดโดย relative change (in percent)

$$\left| \frac{x_i^{new} - x_i^{old}}{x_i^{new}} \right| \times 100 < \epsilon$$

Example

Time	Velocity
5	106.8
8	177.2
12	279.2

- กำหนดความเร็วของจรวด ณ เวลาต่างๆกันเป็นดังนี้
- ความเร็วของจรวดสามารถประมาณได้โดยพนุหามกำลังสอง
- เราต้องการจะหาสัมประสิทธิ์ x_i ที่ทำให้สมการเป็นจริง

$$v(t) = x_1 t^2 + x_2 t + x_3, \quad 5 \leq t \leq 12$$

Example

- เขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

- จากโจทย์เราจะได้ระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

Example

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 106.8 \\ 177.2 \\ 279.2 \end{bmatrix}$$

- เขียนในรูปสมการที่มีค่า x_i อยู่ทางซ้าย

$$x_1 = \frac{106.8 - 5 \cdot x_2 - x_3}{25}$$
$$x_2 = \frac{172.2 - 64 \cdot x_1 - x_3}{8}$$
$$x_3 = \frac{279.2 - 144 \cdot x_1 - 12 \cdot x_2}{1}$$

Example

- เราสามารถเดาค่า x เริ่มต้นได้ง่ายๆ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

- แล้วปรับปรุงค่าของ x_i^{new}

$$x_1 = \frac{106.8 - 5 \cdot 2 - 5}{25} = 3.672$$
$$x_2 = \frac{172.2 - 64 \cdot 3.672 - 5}{8} = -7.851$$
$$x_3 = \frac{279.2 - 144 \cdot 3.672 - 12 \cdot -7.851}{1} = -155.36$$

Example

- เมื่อผ่าน iteration ที่ 1 ไปเราจะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.672 \\ -7.851 \\ -155.35 \end{bmatrix}$$

- โดยมีค่า error ของ x_i แต่ละตัวเป็น

$$\begin{aligned} e_1 &= \left| \frac{3.672 - 1}{3.672} \right| \times 100 = 72.76\% \\ e_2 &= \left| \frac{-7.851 - 2}{-7.851} \right| \times 100 = 125.47\% \\ e_3 &= \left| \frac{-155.36 - 5}{-155.36} \right| \times 100 = 103.22\% \end{aligned}$$

Example

- Iteration 2 ใช้ค่า

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.672 \\ -7.851 \\ -155.35 \end{bmatrix}$$

- จะได้ค่าใหม่เป็น

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{106.8 - 5 \cdot -7.851 + 155.36}{25} = 12.056 \\ x_2 &= \frac{172.2 - 64 \cdot 12.056 + 155.36}{8} = -54.882 \\ x_3 &= \frac{279.2 - 144 \cdot 12.056 - 12 \cdot -54.882}{1} = -789.34 \end{aligned}$$

Example

- เมื่อผ่าน iteration ที่ 2 ค่า error ของ x_i แต่ละตัวเป็น

$$e_1 = \left| \frac{12.056 - 3.672}{12.056} \right| \times 100 = 69.54\%$$
$$e_2 = \left| \frac{-54.882 - 7.851}{-54.882} \right| \times 100 = 85.69\%$$
$$e_3 = \left| \frac{-789.34 - 155.36}{-789.34} \right| \times 100 = 80.54\%$$

Example

- หากทำไปเรื่อยๆจะได้ว่า

Iteration	x_1	e_1	x_2	e_2	x_3	e_3
1	3.672	72.767	−7.8510	125.47	−155.36	103.22
2	12.056	69.543	−54.882	85.695	−798.34	80.54
3	47.182	74.447	−255.51	78.521	−3448.9	76.852
4	193.33	75.595	−1093.4	76.632	−14440	76.116
5	800.53	75.85	−4577.2	76.112	−60072	75.963
6	3322.6	75.906	−19049	75.972	−249580	75.931

- ซึ่งค่า error ไม่ลู่เข้าสู่ 0 เลย

What's the problem ?

- ความจริงแล้ว Gauss-Seidel algorithm สามารถใช้ได้ดีกับระบบสมการที่เมทริกซ์ A มีคุณลักษณะ diagonally dominant
- Diagonally dominant matrix คือเมทริกซ์ที่
  - ค่าสัมประสิทธิ์บน diagonal element มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับผลรวมของสัมประสิทธิ์ตัวอื่นๆ ในแถวนั้น $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$
  - และต้องมี 1 แถวที่ diagonal element มีค่ามากกว่าผลรวมของสัมประสิทธิ์ตัวอื่นๆในแถวนั้น $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ (strictly larger)

What's the problem ?

- เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็น diagonally dominant matrix หรือไม่

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 45 & 43 & 1 \\ 124 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

- เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็น diagonally dominant matrix หรือไม่

$$\begin{bmatrix} 125 & 34 & 56 \\ 23 & 53 & 8 \\ 96 & 34 & 130 \end{bmatrix}$$

Example 2

$$\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 7 & 13 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 28 \\ 76 \end{bmatrix}$$

- เขียนในรูปสมการที่มีค่า x_i อยู่ทางซ้าย

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1 - 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3}{12} \\ x_2 &= \frac{28 - x_1 - 3 \cdot x_3}{5} \\ x_3 &= \frac{76 - 3 \cdot x_1 - 7 \cdot x_2}{13} \end{aligned}$$

Example 2

- เราสามารถเดาค่า x เริ่มต้นได้ง่ายๆ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- แล้วปรับปรุงค่าของ x_i^{new}

$$x_1 = \frac{1 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1}{12} = 0.5$$
$$x_2 = \frac{28 - 0.5 - 3 \cdot 1}{5} = 4.9$$
$$x_3 = \frac{76 - 3 \cdot 0.5 - 7 \cdot 4.9}{13} = 3.1$$

Example 2

- ค่า error ของ x_i แต่ละตัวเป็น

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \left|\frac{0.5-1}{0.5}\right| \times 100 = 100\% \\
e_2 &= \left|\frac{4.9-0}{4.9}\right| \times 100 = 100\% \\
e_3 &= \left|\frac{3.1-1}{3.1}\right| \times 100 = 67.72\%
\end{aligned}
$$

Example 2

- Iteration 2 ใช้ค่า

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 4.9 \\ 3.1 \end{bmatrix}$$

- จะได้ค่าใหม่เป็น

$$x_1 = \frac{1 - 3 \cdot 4.9 + 5 \cdot 3.1}{12} = 0.146$$
$$x_2 = \frac{28 - 0.146 - 3 \cdot 3.1}{5} = 3.71$$
$$x_3 = \frac{76 - 3 \cdot 0.146 - 7 \cdot 4.9}{13} = 3.81$$

Example 2

- เมื่อผ่าน iteration ที่ 2 ค่า error ของ x_i แต่ละตัวเป็น

$$e_1 = \left|\frac{0.146 - 0.5}{0.146}\right| \times 100 = 240.61\%$$
$$e_2 = \left|\frac{3.71 - 4.9}{3.71}\right| \times 100 = 31.89\%$$
$$e_3 = \left|\frac{3.81 - 3.1}{3.81}\right| \times 100 = 18.87\%$$

Example 2

- หากทำไปเรื่อยๆจะได้ว่า

Iteration	x_1	e_1	x_2	e_2	x_3	e_3
1	0.5	100	4.9	100	3.0923	67.662
2	0.14679	240.61	3.7153	31.889	3.8118	18.876
3	0.74275	80.236	3.1644	17.408	3.9708	4.0042
4	0.94675	21.546	3.0281	4.4996	3.9971	0.65772
5	0.99177	4.5391	3.0034	0.82499	4.0001	0.074383
6	0.99919	0.74307	3.0001	0.10856	4.0001	0.00101

- ซึ่งค่า x ท้ายสุดเป็นคำตอบคือ $[0.9999 \quad 3.0001 \quad 4.0001]$

Last word

- หากสลับแถวของเมทริกซ์ A ของตัวอย่างข้างต้นให้ไม่ใช่ diagonally dominant matrix
- Gauss-Seidel algorithm ก็จะไม่ประสบความสำเร็จ
- ดังนั้นแล้วสำหรับบางโจทย์ เราจำเป็นจะต้องจัดเรียงแถวของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ให้อยู่ในรูปของ diagonally dominant เสียก่อน (หากทำได้)
- หากทำไม่ได้อาจจำเป็นจะต้องไปใช้วิธีอื่น

References

- Gauss-Siedel Method by Autar Kaw –
  `http://numericalmethods.eng.usf.edu`