

CS 204451 1

# Algorithm Design and Analysis

วิชาบังคับก่อน: 204251 และ 206281  
 ผู้สอน: ตอน 1 อ. เบญจมาศ ปัญญางาม เรียน ห้อง 201  
 ตอน 2 อ. ดร. จักรีน ขวชาติ เรียน ห้อง 209

บทที่ 3  
 สัญลักษณ์แสดงขีดจำกัด  
 (Asymptotic Notation)  
 Part I

ผศ. ดร. จักรีน ขวชาติ  
 ผศ. เบญจมาศ ปัญญางาม

Comp science CMU

CS 204451 2

# Asymptotic Notation

บทที่ 3

- Contents
  - Growth of the functions
  - Asymptotic notation
    - Property and Proof
  - Mathematics foundation for algorithm analysis
  - Analyzing the time complexity : Examples

ผศ. ดร. จักรีน ขวชาติ  
 ผศ. เบญจมาศ ปัญญางาม

Comp science CMU

CS 204451 3

# Growth of the functions

- Which algorithm ? : Time complexity
- Algorithms A and B that solve the same class of problems.
  - **Comparison:** Time complexity of algorithms A and B

Input Size	Algorithm A	Algorithm B
n	5,000n	$1.1^n$
10	50,000	3
100	500,000	13,781
1,000	5,000,000	$2.5 \times 10^{41}$
1,000,000	$5 \times 10^9$	$4.8 \times 10^{1392}$

This means that algorithm B cannot be used for large inputs, while algorithm A is still feasible.

ผศ. ดร. จักรีน ขวชาติ  
 ผศ. เบญจมาศ ปัญญางาม

Comp science CMU

CS 204451 4

# Growth of the functions

- Running time of an algorithm as a function of input size n **for large n.**
- Growth rates (order of growth) of functions
  - More simplifying abstraction
    - Ignore the lower-order terms
    - Ignore constant coefficient
  - **Example**
    - $10n^2+77n+109$  is a quadratic function  $\approx n^2$  ?

ผศ. ดร. จักรีน ขวชาติ  
 ผศ. เบญจมาศ ปัญญางาม

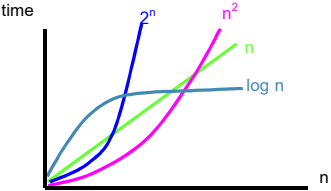
Comp science CMU

CS 204451  
บทที่ 3

## Growth of the functions

5

- What is important : the growth of the complexity functions.
- Growth rates (order of growth) of functions
  - Constant = a
  - Log  $\approx \log(n)$
  - Linear  $\approx n$
  - Log-linear  $\approx n \log_b n$
  - Quadratic  $\approx n^2$
  - Cubic  $\approx n^3$
  - Polynomial  $\approx n^k$
  - Exponential  $\approx a^n, 2^n, 3^n, \dots$
  - n Factorial = n!



ผศ. ดร. อัจฉรินทร์ ชวชาภาณี  
ผศ. เสนอธรรมาศ ปิณฑุญญาราม

Comp science CMU

CS 204451  
บทที่ 3

## Asymptotic notation

6

- Comparison ? Which faster?
  - Asymptotic notation:  $\Theta, \Omega, \omega, O, o$

Asymptotic notation

- Having the expression for the **best case**, **average case** and **worst case**, for all the three cases we need to identify the upper bound, lower bound.
- In order to represent these **upper bound** and **lower bound** we need some syntax and that is the subject of following discussion.

ผศ. ดร. อัจฉรินทร์ ชวชาภาณี  
ผศ. เสนอธรรมาศ ปิณฑุญญาราม

Comp science CMU

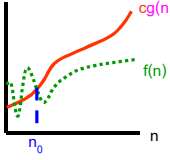
CS 204451  
บทที่ 3

## Asymptotic notation

7

O-notation (big O)

- $f(n) \in O(g(n))$ , or simply  $f(n) = O(g(n))$ .
- $g(n)$  is asymptotically **upper bound** of  $f(n)$ .



For a given function  $f(n)$ , we denote by the set of functions.

$$O(g(n)) = \{ f(n) : \exists c > 0 \text{ and } n_0 > 0 \text{ such that } 0 \leq f(n) \leq cg(n) \text{ for all } n \geq n_0 \} \text{ --- equation(1)}$$

“ $f(n)$  is asymptotically grows less than or equal to  $g(n)$ ”

ผศ. ดร. อัจฉรินทร์ ชวชาภาณี  
ผศ. เสนอธรรมาศ ปิณฑุญญาราม

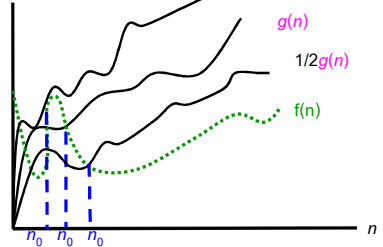
Comp science CMU

CS 204451  
บทที่ 3

## Asymptotic notation

8

- O-notation
- $f(n) = O(g(n))$



- “ $g(n)$  is asymptotically upper bound of  $f(n)$ ”
- “ $f(n)$  is asymptotically grows less than or equal to  $g(n)$ ”

ผศ. ดร. อัจฉรินทร์ ชวชาภาณี  
ผศ. เสนอธรรมาศ ปิณฑุญญาราม

Comp science CMU

CS 204451 9

## Asymptotic notation

□ Example1 (O-notation) :  $3n^2+2n+1 = O(n^2)$  ?

**Prove:**  $f(n)= 3n^2+2n+1$ , and  $g(n)=n^2$ .  
 We want to prove that  $f(n)=O(g(n))$ .  
 From definition of  $f(n)=O(g(n))$  in eq. (1).  
 Find  $c > 0$  and  $n_0 > 0$  such that  $3n^2+2n+1 \leq cn^2$  for all  $n \geq n_0$

$$3n^2+2n+1 \leq cn^2$$

$$3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \leq c$$

If choosing  $n_0 = 1$  and  $c=6$ ,  $3n^2+2n+1 \leq cn^2$  for all  $n \geq n_0$   
 Thus  $3n^2+2n+1 = O(n^2)$  is True.

ผศ. ดร. จักรีน ชวชาทิ  
 ผศ. เสนอธมาศ ปัญญาราม

Comp science CMU

CS 204451 10

## Asymptotic notation

□ Example2 (O-notation):  $2^{n+1} = O(2^n)$  ?

ผศ. ดร. จักรีน ชวชาทิ  
 ผศ. เสนอธมาศ ปัญญาราม

Comp science CMU

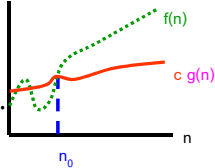
CS 204451 11

## Asymptotic notation

**$\Omega$ -notation**

□  $f(n) = \Omega(g(n))$  :

□  $g(n)$  is asymptotically lower bound of  $f(n)$ .



For a given function  $f(n)$ , we denote by the set of functions.

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) : \exists c > 0 \text{ and } n_0 > 0 \text{ such that } 0 \leq cg(n) \leq f(n) \text{ for all } n \geq n_0 \} \text{ ---eq (2)}$$

“ $f(n)$  is asymptotically grows more than or equal to  $g(n)$ ”

ผศ. ดร. จักรีน ชวชาทิ  
 ผศ. เสนอธมาศ ปัญญาราม

Comp science CMU

CS 204451 12

## Asymptotic notation

□  **$o$ -notation**

$o(g(n)) = \{ f(n) : \text{for all } c > 0 \text{ and } n_0 > 0 \text{ such that } 0 \leq f(n) < cg(n) \text{ for all } n \geq n_0 \} \text{ ---eq (3)}$

An upper bound that is **not tight**

$f(n) = o(g(n))$ :  $f(n)$  is asymptotically grows strictly less than  $g(n)$

$2n^2 = O(n^2)$  is tight ,  
 but  $2n = O(n^2)$  is **not tight**  
 $2n = o(n^2)$  but  $2n^2 \neq o(n^2)$

ผศ. ดร. จักรีน ชวชาทิ  
 ผศ. เสนอธมาศ ปัญญาราม

Comp science CMU

CS 204451 13

## Asymptotic notation

□  $\omega$ -notation

$\omega(g(n)) = \{ f(n) : \text{for all } c > 0 \text{ and } n_0 > 0 \text{ such that } 0 \leq cg(n) < f(n) \text{ for all } n \geq n_0 \}$  ---eq (4)

A lower bound that is **not tight**

$f(n) = \omega(g(n))$ :  $f(n)$  is asymptotically grows strictly more than  $g(n)$

$n^2/2 = \omega(n)$ , but  $n^2/2 \neq \omega(n^2)$

ผศ. ดร. จักรีน ขวชาดี  
ผศ. เสนอจมาศ ปิณฑุญาราม

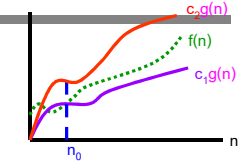
Comp science CMU

CS 204451 14

## Asymptotic notation

□  $\Theta$ -notation

$f(n) = \Theta(g(n))$   
 $g(n)$  is asymptotically tight bound of  $f(n)$ .



For a given function  $g(n)$ , we denote by the set of functions.

$\Theta(g(n)) = \{ f(n) : \exists c_1 > 0, c_2 > 0 \text{ and } n_0 > 0 \text{ such that } 0 \leq c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n) \text{ for all } n \geq n_0 \}$  ---eq(5)

“ $f(n)$  is asymptotically grows equally as  $g(n)$ ”

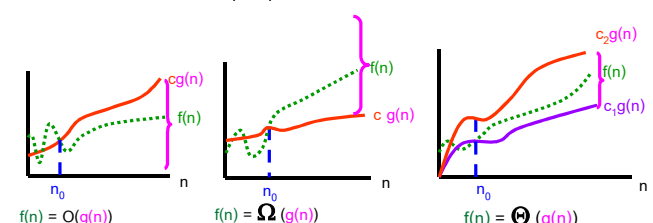
ผศ. ดร. จักรีน ขวชาดี  
ผศ. เสนอจมาศ ปิณฑุญาราม

Comp science CMU

CS 204451 15

## Asymptotic notation

□ Relations between  $\Omega, \Theta, O$



Running time :

Worst-case	Best-case
$f(n) = \Theta(g(n))$ iff $f(n) = O(g(n))$ and $f(n) = \Omega(g(n))$	
i.e., $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$	

ผศ. ดร. จักรีน ขวชาดี  
ผศ. เสนอจมาศ ปิณฑุญาราม

Comp science CMU

CS 204451 16

## Asymptotic notation

□ Example 3 ( $\Theta$ -notation) :  $n^2/2-3n = \Theta(n^2)$  ?

Prove  $f(n) = n^2/2-3n$ , and  $g(n) = n^2$ .

We want to prove that  $f(n) = \Theta(g(n))$ .

From definition of  $f(n) = \Theta(g(n))$  in eq. (5).

Find  $c_1, c_2 > 0$  and  $n_0 > 0$  such that  $c_1n^2 \leq n^2/2-3n \leq c_2n^2$  for all  $n \geq n_0$ .

$c_1 \leq 1/2-3/n \leq c_2$  for all  $n \geq n_0$  after dividing with  $n^2$ .

$c_1 \leq 1/2-3/n$	$1/2-3/n \leq c_2$
$n = 7, c_1 = 1/14$	$c_2 = 1/2, n \geq 1$

หา  $n$  ที่ทำให้  $c_1 > 0$  และอสมการเป็นจริง

Choosing  $c_1 = 1/14, c_2 = 1/2$  and  $n_0 = 7$ ,  $c_1n^2 \leq n^2/2-3n \leq c_2n^2$  for all  $n \geq n_0$ .

This  $n^2/2-3n = \Theta(n^2)$  is True.

ผศ. ดร. จักรีน ขวชาดี  
ผศ. เสนอจมาศ ปิณฑุญาราม

Comp science CMU

## Practice : Asymptotic notation

□ ให้แสดงวิธีทำอย่างละเอียดทุกข้อ

	f(n)	g(n)	Show that
1.	$6n^3$	$n^2$	$f(n)=\Theta(g(n))$ ?
2.	$7n + 8$	$n^2$	$f(n)=O(g(n))$ ?
3.	$3 \log n + 5$	$\log n$	$f(n)=O(g(n))$ ?
4.	$n^3 + n \log n$	$n^3$	$f(n)=\Theta(g(n))$ ?
5.	$(1/2) n^2 - 3n$	$n^2$	$f(n)=\Theta(g(n))$ ?
6.	$n^{\log 4}$	$3^{\log n}$	$f(n)=\Omega(g(n))$ ?

## Asymptotic notation : Practice &amp; Solution

□  $f(n)= 6n^3$  ,  $g(n)= n^2$  Prove  $f(n)= \Theta(g(n))$  ?