Algorithm Design and Analysis

วิชาบังคับก่อน: 204251 และ 206281

ผู้สอน: ตอน 1 อ. เบญจมาศ ปัญญางาม เรียน ห้อง 201
ตอน 2 อ. ดร. จักริน ชวชาติ เรียน ห้อง 209

บทที่ 1

ทบทวนคณิตศาสตร์

(Math Reviews)

Basics

- Factorial: $n! = 1*2*3*.....*n$
- Permutation - a rearrangement of a sequence
- Boolean variable - takes on 2 values
  - 0 (TRUE), 1 (FALSE)
- Modulus - mod - Remainder
  - x mod y - remainder when divide x by y
  - 10 mod 3 is 1
- Ceiling - round up $\lceil x \rceil$
- Floor - round down $\lfloor x \rfloor$

Exponents

- $X^A X^B = X^{A+B}$
- $X^A / X^B = X^{A-B}$
- $(X^A)^B = X^{AB}$
- $X^n + X^n = 2X^n \neq X^{2n}$
- $2^n + 2^n = 2*2^n = 2^{n+1}$

Logarithms

1. $\log(A^B) = B \log A$
2. $A = B^X$ if and only if $\log_B A = X$
3. $\log_A B = \dfrac{\log_C B}{\log_C A}$; $A, B, C > 0$, $A \neq 1$

Let $X = \log_C B$, $Y = \log_C A$, and $Z = \log_A B$

then $C^X = B$, $C^Y = A$, and $A^Z = B$

➔ $B = C^X = (C^Y)^Z = C^{YZ}$, Hence $X = YZ$ and $Z = X/Y$

Logarithms

4. $\log(AB) = \log A + \log B;\ \ A, B > 0$

   Let $X = \log_2 A$, $Y = \log_2 B$, and $Z = \log_2 AB$

   Hence $2^X = A$, $2^Y = B$, and $2^Z = AB$

   ➔ $2^Z = AB = 2^X 2^Y = 2^{(X+Y)}$

   So $X + Y = Z$

5. $\log(A/B) = \log A - \log B$

6. $\log A < A$ for all $A > 0$

Logarithms

$\log 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$

➔ $\log_2 1024 = \log_2 2^{10} = 10 \log_2 2 = 10$

$\ln a = \log_e a$, $\log_2 a = \lg a$

$\log^2 a = (\log a)^2$, $\log \log a = \log(\log a)$

$$x = 2^{16}, \log_2(x) = \log_2(2^{16}) = 16$$

$$x = 5^2 = \frac{1}{5 * 5} = \frac{1}{25}\ , \log_5 x = \log_5 \frac{1}{25} = -2$$

Summations

For integers a and b, $a \leq b$, $\sum_{i=a}^{b} 1 = b - a + 1$

For $n \geq 0$,

Linear Series (Arithmetic Series): $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{n-1} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{(n-1)(n)}{2}$$

Quadratic Series: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Cubic Series: $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Geometric Series

- $\sum_{i=0}^{n} a^i = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$

เช่น

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

if $0 < a < 1$, $\sum_{i=0}^{n} a^i \leq \frac{1}{1-a}$

if N -> ∞ , $\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$

Limits and Differentiation

- Limits and Differentiation

$$\lim_{n \to \infty} c = c$$

$$\lim_{n \to \infty} n = \infty$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^a) = a(x^{a-1})$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{d}{dx}(u)$$

$$\frac{d}{dx}(u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(u/v) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

เซต (Sets)

กลุ่มของสิ่งต่างๆ จะถูกเรียกว่า เซต (Set) เช่นเซตของเดือนทั้งสิบสอง, เซตของวันทั้งเจ็ด ฯลฯ

เซตสามารถเก็บวัตถุชนิดอะไรก็ได้รวมทั้งตัวเลข, สัญลักษณ์, หรือแม้กระทั่งเซตอื่น

วัตถุที่อยู่ภายในเซต เรียกว่า สมาชิก (Element หรือ member) โดยทั่วไป นิยมตั้งชื่อเซตด้วยตัวอักษรใหญ่และเขียนสัญลักษณ์แทนเซตด้วยปีกกา { } ตัวอย่างเช่น

$$A = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

$$B = \{football, basketball, running, swimming\}$$

การเขียนเซต

ในการแจกแจงสมาชิกของเซตนั้น เราจะใช้เครื่องหมายจุลภาค (,) คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว หากมีจำนวนมากจะใช้ ... ในการละสมาชิกบางตัวไว้ในฐานที่เข้าใจ

- การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก เช่น A ={28, 29, 30, 31}
- การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข เป็นการเขียนในรูป {สมาชิก | เงื่อนไขในการเป็นสมาชิก} อ่านว่า "เซตของ (สมาชิก) โดยที่ (เงื่อนไข)"
  เช่น S = { j | j > 0, and j = 2k for some k>0 }, T = {x | x เป็นจำนวนเฉพาะที่มากกว่า 10}

เราจะเขียน $x \in A$ แทน "x เป็นสมาชิกของเซต A"

เราจะเขียน $x \notin A$ แทน "x ไม่เป็นสมาชิกของเซต A"

เซตจำกัดและเซตอนันต์

เซตจำกัด (Finite set) คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ (บอกจำนวนสมาชิกได้) เช่น A = {4, -10, 55, 6}

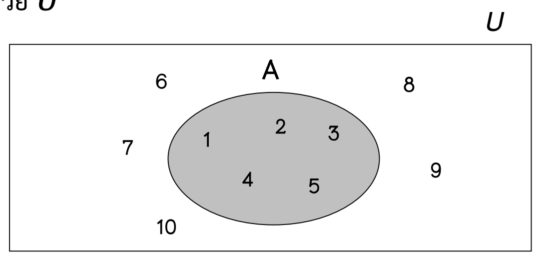
จำนวนสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย n(A) = 4

เซตอนันต์ (Infinite set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เช่น B = {2, 4, 6, 8, 10, …}

คำถาม C = {1, 2, 3, 4, …, 10} เป็นเซตจำกัดหรือไม่

เซตว่างและเอกภพสัมพัทธ์

- เซตว่าง คือเซตที่ไม่มีสมาชิก เขียนแทนด้วย ϕ หรือ {}
- เอกภพสัมพัทธ์ คือเซตที่กำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงสิ่งใดนอกเหนือไปจากสมาชิกของเซตที่กำหนดขึ้น (ขอบเขตที่เราสนใจ) เขียนแทนด้วย U



A = { 1, 2, 3, 4, 5 }　　U = { 1 , … , 10 }

ข้อสังเกต

การเขียนสมาชิกภายในเซต จะไม่มีลำดับก่อนหลัง สนใจแค่ว่า "อยู่" หรือ "ไม่อยู่" ในเซตเท่านั้น ดังนั้น สมาชิกที่ปรากฏซ้ำจะนับเป็นตัวเดียวกัน (ถ้าสนใจตัวซ้ำจะเรียก multiset)

หมายเหตุ ภายในเซตอาจจะมีคู่อันดับ หรือมีเซตอยู่อีกชั้น หรือมีสมาชิกเป็นอย่างไรก็ได้ โดยหลักการนับจำนวนสมาชิกจะให้ 1 คู่อันดับ หรือ 1 เซตเป็นสมาชิก 1 ตัวเช่น
E = {5, (6,7), {8,9,10},11,(12,13)} จะได้ว่า n(E) = 5

ความสัมพันธ์ระหว่างเซต

สับเซต

A เป็นสับเซตของ B ถ้าสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และเขียนแทนด้วย $A \subseteq B$
เราบอกว่า A เป็น proper subset ของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ ถ้า A เป็น subset ของ B แต่ไม่เท่ากับ B

การเท่ากันของเซต

A = B ก็ต่อเมื่อ

1.สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และ

2.สมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A

นั่นคือ A = B ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

ข้อสังเกต

สำหรับเซต A ใดๆ

- $\phi \subset A$
- $A \subset A$
- $A \subset U$

เรียกสับเซตของ A ที่ไม่เท่ากับ A ว่า สับเซตแท้ของ A

ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ n(A) = m แล้ว A จะมีสับเซตแตกต่างกันทั้งหมด 2^m สับเซต

เพาวเวอร์เซต

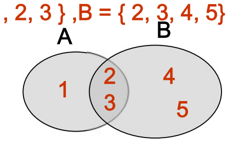
- เพาวเวอร์เซตคือเซตที่บรรจุด้วยสับเซตทั้งหมดที่เป็นไปได้ เพาวเวอร์เซตของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(A) นิยามโดย $P(A)=\{B \mid B \subset A\}$
- ตัวอย่าง กำหนดให้ A = {1,2,3} จงหา P(A)
- จะได้ว่า $P(A)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$
- ข้อสังเกต สำหรับเซต A ใดๆ
  - P(A) คือเซตที่ประกอบไปด้วยสับเซตทั้งหมดของ A
  - ถ้า A เป็นเซตจำกัดแล้ว $n(P(A)) = 2^{n(A)}$
  - $\phi \in P(A)$ และ $A \in P(A)$
  - ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
  - $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
  - $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

การดำเนินการของเซต

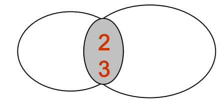
U={1,2,3,4,5,6,7}

A = { 1, 2, 3 } ,B = { 2, 3, 4, 5}

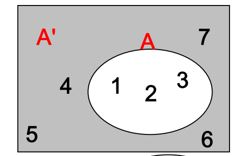
- Union:
  - $A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ or } x \in B\}$



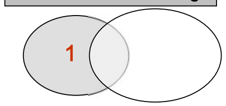
- Intersection:
  - $A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ and } x \in B\}$



- Complement:
  - $A'=\{x \mid x \notin A\}$



- Difference:
  - $A-B=\{x \mid x \in A \text{ and } x \notin B\}$



สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(A \cap B)' = A' \cup B'$
$(A')' = A$	
$\emptyset' = U$	$U' = \emptyset$
$A \cup \emptyset = A$ $A - \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$ $\emptyset - A = \emptyset$
$U \cup A = U$ $U - A = A'$	$U \cap A = A$ $A - U = \emptyset$
$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \emptyset$
$A - B = A \cap B'$	
ถ้า $A \subset B$ แล้ว $B' \subset A'$	

แบบฝึกหัด

ในห้องเรียนห้องหนึ่งมีนักเรียน 73 คน ว่ายน้ำเป็น 45 คน ขับรถเป็น 26 คน ทำไม่เป็นทั้งสองอย่าง 18 คน ถามว่า

1.ว่ายน้ำเป็นและขับรถเป็น กี่คน

2.ว่ายน้ำเป็นหรือขับรถเป็น กี่คน

Sequences and Tuples

ลำดับ(Sequence) ของวัตถุคือรายการของวัตถุที่มีลำดับก่อนหลัง เราจะเขียนภายในวงเล็บ ตัวอย่างเช่นลำดับ 7,21,57 เขียนเป็น

(7,21,57)

ในเซตลำดับก่อนหลังไม่สำคัญแต่ในลำดับนั้นสำคัญ ดังนั้น (7,21,57) ไม่เท่ากับ (57,7,21) ตัวที่ซ้ำกันก็มีความสำคัญเช่นกัน

ลำดับอาจจะมีจำนวนจำกัดหรือไม่ก็ได้ ลำดับจำกัดมักจะเรียกว่า tuple โดยลำดับที่มี k ตัวจะเรียกว่า k-tuple เช่น (7,21,57) คือ 3-tuple ส่วน 2-tuple เรียกว่าคู่อันดับ(pair)

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

- คู่อันดับ ประกอบด้วยสมาชิกสองตัวในรูป (a,b) ซึ่งไม่สามารถเปลี่ยนลำดับสมาชิกตัวหน้ากับตัวหลังได้ และ (a,b) = (c,d) ก็ต่อเมื่อ a =c และ b = d เท่านั้น

- ผลคูณคาร์ทีเซียน กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product) ของ A และ B บางครั้งเรียก Cross product เขียนแทนด้วย A x B คือเซตของคู่อันดับที่สมาชิกตัวแรกมาจากเซต A และสมาชิกตัวที่สองมาจากเซต B ครบทุกคู่

$$AxB=\{(a,b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

- ข้อสังเกต โดยทั่วไป AxB ≠BxA แต่ n(AxB) = n(BxA)=n(A)n(B)

Cartesian Product

A = { 2, 4 }   B = { 2, 3, 5 }

A X B = { (2, 2), (2, 3), (2, 5), (4, 2), (4, 3), (4, 5) }

|A X B| = |A| |B|

Generalizes to more than two sets

A X B X ... X Z

- ถ้า A = {1,2} และ B={x,y,z}

  AxB = {(1,x),(1,y),(1,z),(2,x),(2,y),(2.z)}

- เราสามารถเขียน Cartesian product ของ k เซตด้วย $A_1xA_2x...xA_k$ โดยมันจะเป็นเซตที่ประกอบไปด้วย ทุก k-tuple $(a_1,a_2,...,a_k)$ ที่ $a_i \in A_i$

- ถ้า AxBxA จะเป็นอย่างไร

ฟังก์ชัน(Function)

ฟังก์ชัน เป็นวัตถุที่สร้างมาจากความสัมพันธ์ของ input-output
นั่นคือฟังก์ชันจะนำเอา input เข้าไปแล้วสร้าง output ออกมา

ในทุกๆ ฟังก์ชันจะมีคุณสมบัติอย่างหนึ่งคือ input ตัวเดิมจะสร้าง output ตัวเดิมเสมอ
ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ output เป็น b เมื่อ input เป็น a เขียนได้เป็น

$$f(a) = b$$

ฟังก์ชันบางครั้งจะเรียกว่า mapping และถ้า f(a) = b เราจะเรียกว่า f map จาก a ไป b

ตัวอย่างฟังก์ชัน absolute abs ที่รับตัวเลข x เป็น input และคืนค่า x ถ้า x เป็นค่าบวกและคืนค่า –x เมื่อ x เป็นค่าลบ ดังนั้น

abs(2) = abs(-2) = 2

การบวกเป็นอีกตัวอย่างของฟังก์ชัน โดยรับข้อมูลเป็นคู่ของจำนวนและ output เป็นผลรวมของจำนวน

Domain and Range

- เซตของ input ที่เป็นไปได้ของฟังก์ชันจะเรียกว่า Domain
- Output ของฟังก์ชันที่มาจาก set ด้านบนจะถูกเรียกว่า Range
- สัญลักษณ์ที่บอกว่า f เป็นฟังก์ชันจาก Domain D และ Range R คือ

$$F : D \longrightarrow R$$

- ในกรณีฟังก์ชัน abs ถ้าเราทำงานบน integer Domain และ range จะเป็น Z (เซตของ integer) เราจะเขียนได้ว่า abs: Z ⟶ Z
- ในกรณีการบวก Domain จะเป็น ZxZ ส่วน Range เป็น Z ดังนั้นจะเขียนได้เป็น add: ZxZ ⟶Z
- ฟังก์ชันที่ใช้ทุกสมาชิกใน Range จะเรียกว่า onto

Recurrence Relations

- Recursion defines the operation (function) in terms of some work plus the amount of time to solve a smaller problem (using the same algorithm).

Examples1:

T(n) = T(n-1) + 1, and the base case, T(1) = 0

Examples2:

T(n) = T(n-1) + n; and the base case, T(1)=1

CS 204451
บทที่ 1

Recurrence Relation Solving

29

- Many recurrence relations are solved using the brute force method. Expand it; see the pattern and solve it.

For example 1: T(n) = T(n-1) + 1, T(1) = 0

T(n) = T(n-1)+1 = T(n-2)+1+1
= T(n-3)+ 1+1+1 = T(n-(n-1))+ (n-1)
= T(1)+(n-1) = 0 + n-1 = n-1

For example 2:T(n) = T(n-1) + n, T(1)=1

T(n) = T(n-1) + n = T(n-2) + (n-1)+ n
= T(n-3) +(n-2) + (n-1)+ n
= T(1) + 2 + 3 + … +(n-2) + (n-1)+ n
= 1+2+3…+n = n(n+1)/2

CS 204451
บทที่ 1

Proof Techniques

30

- Proof by induction
  - First prove a *base case* (n=0 or n=1)
    - Show the theorem is true for some small degenerate values
  - Next assume an *inductive hypothesis*
    - Assume the theorem is true for all cases up to some limit *k -1* (for n=k-1)
  - Then , prove the theorem is true for n=k

CS 204451
บทที่ 1

Proof by Induction : Example

31

- Want to show that 1+2+3+…+n = n(n+1)/2
- Base case: n=1 $\Rightarrow$ 1=1(2)/2=1
- Inductive Hypothesis: assume 1+2+3+…+n-1=(n-1)(n)/2 ;
- Now prove that 1+2+…+n = n(n+1)/2
  - Using inductive hypothesis

1+2+3+…+n-1 = (n-1)(n)/2
1+2+3+…+n-1 +n = (n-1)(n)/2 + n
= [(n-1)(n)+2n]/2
= [n(n-1+2)]/2
= n(n+1)/2

CS 204451
บทที่ 1

Proof by Induction : Example

32

- Let $T(n) = 2T(n/2) + n$ if $n > 1$, และ $T(1) = 1$
- Want to show that $T(n) = n \log n + n$
- Base case: $n = 1 \Rightarrow n \log n + n = 1$
- Inductive Hypothesis :
  assume $T(k) = k \log k + k$ for all $k < n$.
- Now prove that $T(n) = n \log n + n$

$T(n) = 2\,T(n/2) + n$
$= 2\,((n/2)\log(n/2) + (n/2)) + n$ → Using inductive hypothesis
$= n\,(\log(n/2)) + 2n$

- by using log(ab)=log a+log(b) and log(1/a)=-log a

$= n \log n - n + 2n$
$= n \log n + n$

Proof Techniques

- Proof by Contradiction
  - Find a counterexample to prove theorem is false
  - Assume the opposite of the conclusion is true. Use steps to prove a contradiction (for example 1=2), then the original theorem must be true.

Proof by Contradiction : Example

To prove that "if a and b are consecutive integers, then the sum a + b is odd"

- Assume: a , b are consecutive integers and a + b is not odd.
- Since a + b is not odd
  - so, there exists no number k such that a + b = 2k + 1.
- However, the integers a and b are consecutive,
  - so we may write the sum a + b as 2a + 1.
- Thus, we have derived that a + b $\neq$ 2k + 1 for any integer k and also that a + b = 2a + 1. This is a contradiction.
- If we hold that a and b are consecutive then we know that the sum a + b must be odd