Recursions

Assembled for 204112 by
Kittipitch Kuptavanich
Ratsameetip Wita

Divide and Conquer

- หรือ Divide and Rule
  - ในทางประวัติศาสตร์และการปกครอง คือการสร้างอำนาจ หรือรักษาอำนาจไว้โดยการ
    - แบ่งเป้าหมายเป็นหน่วยเล็ก ๆ ที่มีกำลังน้อยกว่า (Divide)
    - แล้วเข้ายึดอำนาจทีละส่วน (Conquer)

Recursion

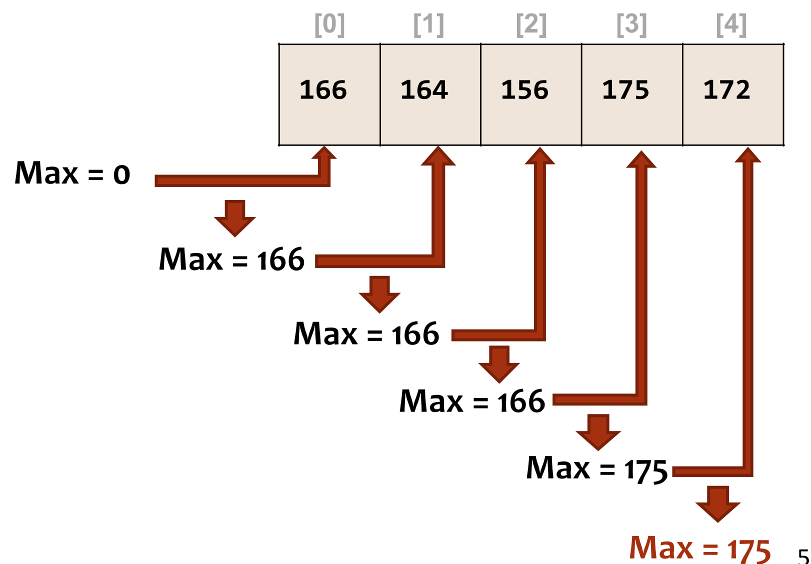
- Recursion (หรือการเวียนเกิด) เป็นการใช้หลัก Divide and Conquer ในการแก้ปัญหา
  - Divide แบ่งปัญหาที่ต้องการแก้ เป็นปัญหาย่อย (Sub problem) - ควรแบ่งแล้วปัญหาเล็กลงหรือซับซ้อนน้อยลง
  - Conquer แก้ปัญหาย่อย – เรียกใช้ function ตัวเอง
  - Combine นำคำตอบของปัญหาย่อยมารวมกันเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหาหลัก

Example 1: findMax

Load งานอยู่ที่คนคนเดียว

- Iterative (loop) solution
  - นำกระดาษมา เขียนค่า max = 0
  - ไล่ถามความสูง (height) ทีละคน
  - ถ้าเจอคนที่ความสูง (height) มากกว่าที่ max จดในกระดาษ
    - Update ค่า max ในกระดาษเป็นค่า height

Example 1: findMax [2]

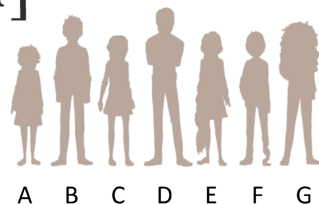


Example 1: findMax [3]

```
arrayA =
[166,164,156,175,172,156,182,180,171,159]

function findMaxIt(arrayA)
    maxH = 0
    for num in arrayA
        if num > maxH
            maxH = num
        endif
    endfor

    return maxH
```


Example 1: findMax [4]

- **Recursive solution**
  - **ต้องการหา max of 7 people**

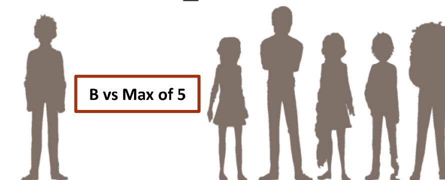


  - **A บอกเพื่อนให้ หา maxOf_6 แล้ว A จะหา maxOf_7**

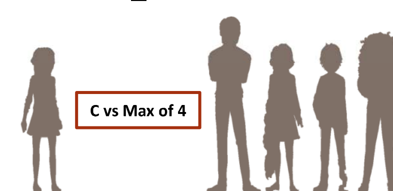
  - **โดยเทียบความสูงของ A และ maxOf_6**

Example 1: findMax [5]

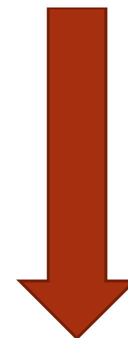
- **ต้องการหา max of 6 people**
  - **B บอกเพื่อนให้ หา maxOf_5 แล้ว B จะหา maxOf_6**



- **ต้องการหา max of 5 people**
  - **C บอกเพื่อนให้ หา maxOf_4 แล้ว C จะหา maxOf_5**



ปัญหาเล็กลง



AND So on....

Example 1: findMax [6]

- ต้องการหา max of 1 people
  - G บอกว่า G สูงที่สุดถ้าอยู่คนเดียว maxOf_1 = G
  - Return maxOf_1 ให้ F

- F ได้ค่า maxOf_1 จาก G
  - F สูงน้อยกว่า maxOf_1
  - ดังนั้น maxOf_2 = maxOf_1
  - Return maxOf_2 ให้ E

Example 1: findMax [7]

- E ได้ค่า maxOf_2 จาก F
  - E สูงน้อยกว่า maxOf_2
  - ดังนั้น maxOf_3 = maxOf_2
  - Return maxOf_3 ให้ D

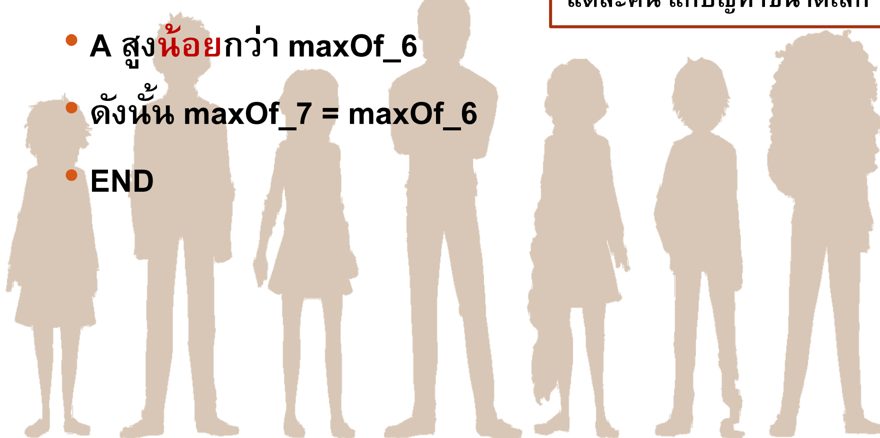
- D ได้ค่า maxOf_3 จาก E
  - D สูงมากกว่า maxOf_3
  - ดังนั้น maxOf_4 = D
  - Return maxOf_4 ให้ C

AND So on....

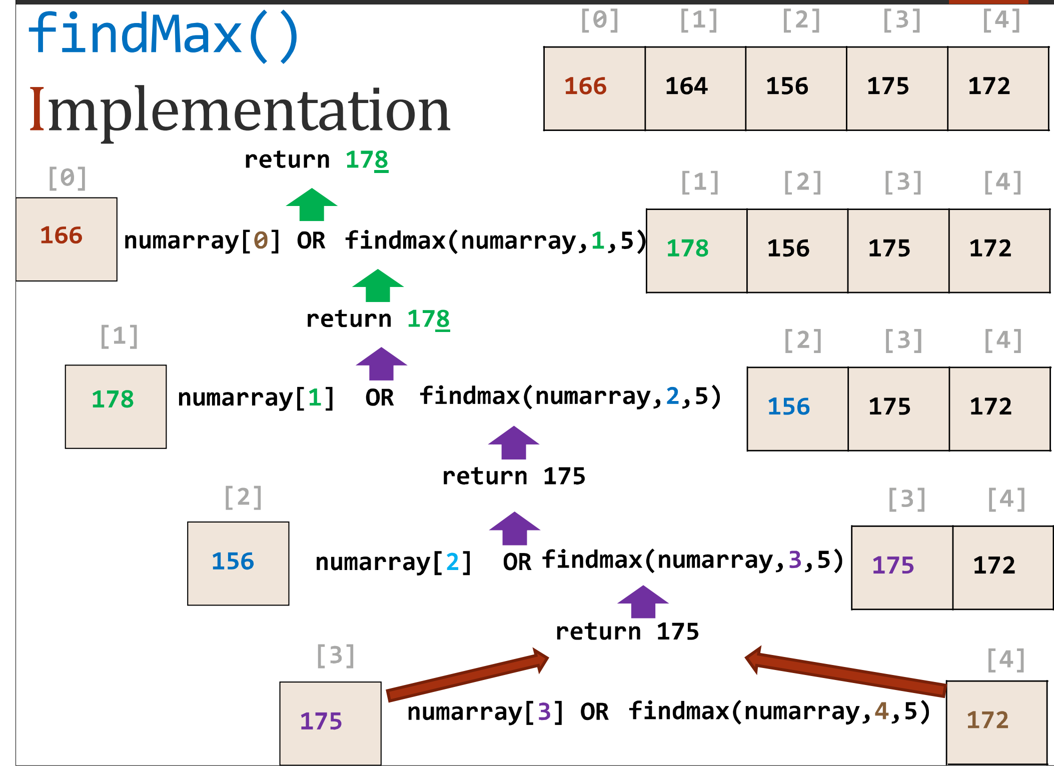
Example 1: findMax [8]

Load งานกระจาย
แต่ละคน แก้ปัญหาขนาดเล็ก

- A ได้ค่า maxOf_6 จาก B
  - A สูงน้อยกว่า maxOf_6
  - ดังนั้น maxOf_7 = maxOf_6
  - END



findMax() Implementation



findMax() Implementation [2]

```
int findMax(numArray,pos,lenA) {
```

ต้องมี base case

```
int findMax(numArray,pos,lenA) {
  if (pos == lenA - 1)
    return numArray[pos];

  // แบ่งเป็นปัญหาที่เล็กลง (divide & conquer)
  firstBlock = numArray[pos]
  maxRest =
    findMax(numArray,pos+1,lenA)

  // นำคำตอบมารวมกัน (combine)
  if (firstBlock > maxRest)
    return firstBlock;
  else
    return maxRest;
}
```


General Structure

```
output recurse(arguments) {
  // base case = terminate
  // ถ้าปัญหาเล็กพอที่จะ solve ได้ - ไม่จำเป็นต้องแบ่งอีกต่อไป)
  if smallEnough(arguments)
    return answer

  // divide and conquer (แบ่งปัญหาและเรียกใช้ function ตัวเอง)
  myWorkLoad = someFunction(arguments)
  answerFromSubproblem = recurse(smallerArguments)

  // combine (นำคำตอบมารวมกัน)
  answer = combine(myWorkLoad,answerFromSubproblem);

  return answer
}
```

ต้องแบ่งแล้วปัญหาเล็กลง หรือซับซ้อนน้อยลง และ วิ่งเข้าสู่ base case

Adapted From:
http://ocw.mit.edu/courses/civil-and-environmental-engineering/1-00-introduction-to-computers-and-engineering-problem-solving-spring-2012

Example 2: Factorial

พิจารณา 5! และ 4!

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$

Define n! แบบ recursive

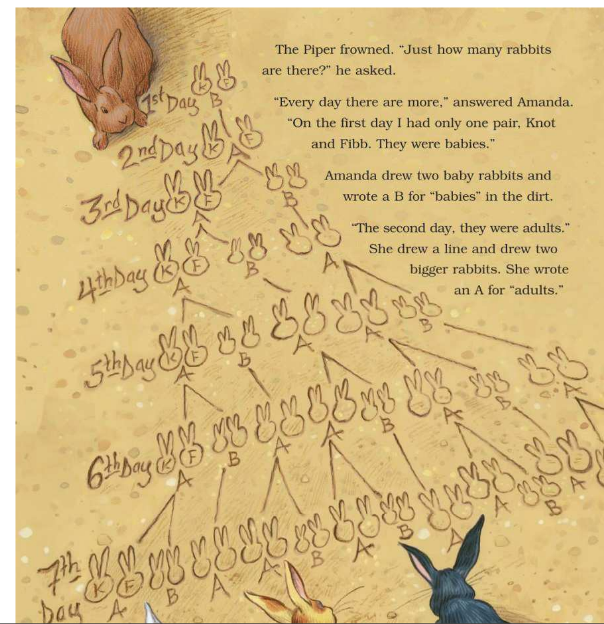
$5! = 5 \times 4!$

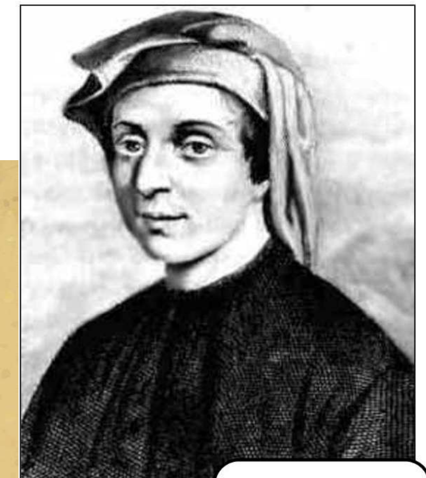
Base case? หยุดที่ 1

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ n \times (n-1)!, & n > 0 \end{cases}$$

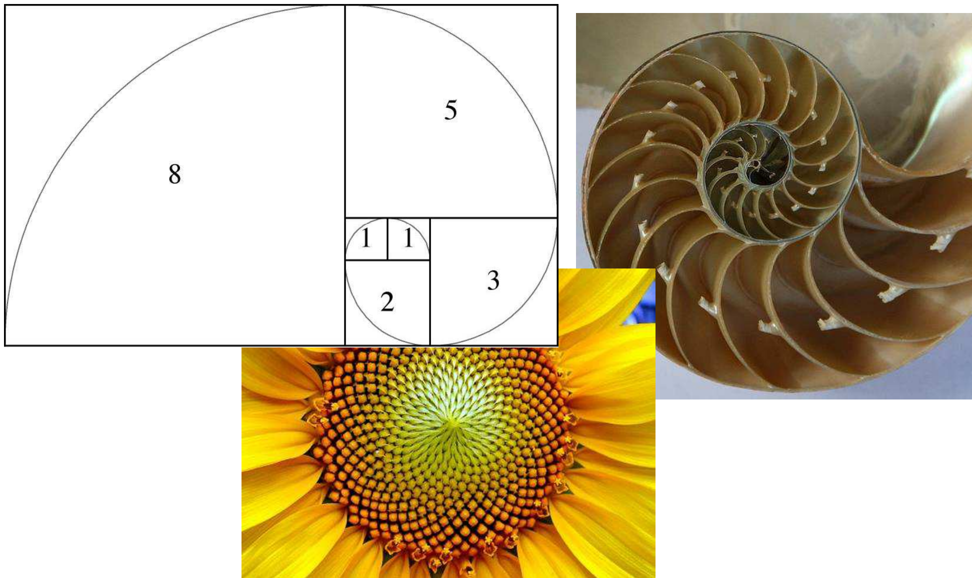
```
int factorial(int n) {
  //base case


  //divide & conquer



  //combine


}
```


Fibonacci… and his rabbits



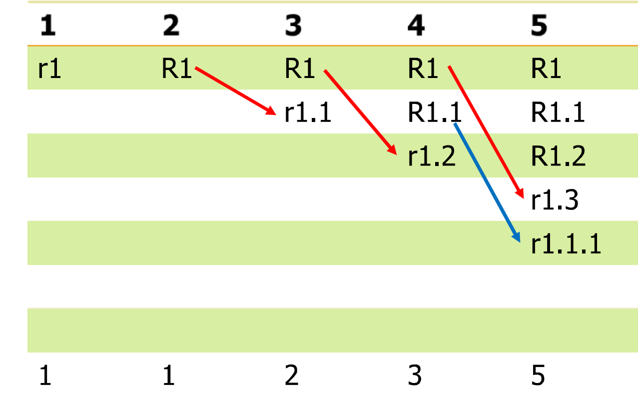


Example 3: Fibonacci Sequence



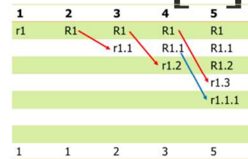
Example 3: Fibonacci Sequence [2]

- ลูกกระต่าย 1 ตัว
  - ใช้เวลา 1 เดือนจะโตเต็มวัย
- กระต่ายโตเต็มวัย 1 ตัว
  - ใช้เวลา 1 เดือนคลอดลูก 1 ตัว



1	2	3	4	5
r1	R1	R1	R1	R1
		r1.1	R1.1	R1.1
			r1.2	R1.2
				r1.3
				r1.1.1
1	1	2	3	5

Example 3: Fibonacci Sequence [3]



- จำนวนกระต่ายในเดือนนี้
  = จำนวนกระต่ายเดือนที่แล้ว + จำนวนกระต่ายเกิดใหม่เดือนนี้
  = จำนวนกระต่ายเต็มวัยเดือนที่แล้ว
  = จำนวนกระต่ายสองเดือนที่แล้ว
- จำนวนกระต่ายในเดือนนี้
  = จำนวนกระต่ายเดือนที่แล้ว + จำนวนกระต่ายสองเดือนที่แล้ว

Fib (n) = Fib (n – 1) + Fib (n – 2)

- 1 1 2 3 5 8 13 21 ……

Example 3: Fibonacci Sequence [4]

- **Divide:**
  - Number of Rabbit of month (n)
    - Fib (n) = R + r
- **Conquer**
  - R = Fib(n – 1)
  - r = Fib(n – 2)
- **Combine**
  - total = R + r
- **Base Case**
  - Fib(1) = 1
  - Fib(2) = 1

```
function fib(x) {

    if (x == 1)
        return 1;

    if (x == 2)
        return 1;

    int R = fib(x - 1);
    int r = fib(x - 2);

    int total = R + r;
    return total;
}
```

The Three Laws of Recursion

1. A recursive algorithm must have a **base case**.
2. A recursive algorithm must change its state and **move toward the base case**.
3. A recursive algorithm must **call itself**, recursively.

Credit: http://interactivepython.org/courselib/static/pythonds/Recursion/recursionsimple.html

Example 4: Prime Factor

ให้เขียนโปรแกรมเพื่อแสดงค่าตัวประกอบเฉพาะของ integer x โดยใช้ Recursion ทั้งนี้ให้อ่าน input จาก command redirection (บรรทัดแรกคือจำนวน test case)

input1.txt

```
3
360
17
1
```

output1.txt

```
2 2 2 3 3 5
17
1
```


Example 4: Prime Factor [2]

```
function primeFactor(x,num)

    //base case
    if (num == 1)
        return
    //d & c
    if (num % x == 0) then
        print(x)
        primeFactor(x,num/x)

    else
        primeFactor(x+1,num)

    endif
```

Print แล้ว ค่อย call

Tail vs Head Recursions

- เราเรียก recursion ที่มี recursive call อยู่ส่วนหลังของ function ว่า tail recursion
  - Tail recursion มีลักษณะคล้าย loop
    - ทำงานส่วนของตัวเองก่อน แล้วส่งให้เพื่อนทำ
      - myworkLoad ก่อน แล้วค่อย call `recurse(smallerArguments)`
    - ไม่จำเป็นต้องรอผล return จากเพื่อนค่อยตัดสินใจ
      - ไม่ต้องรอ `answerFromSubproblem` เพื่อมา combine

Tail vs Head Recursions [2]

- ถ้า recursion อยู่ส่วนต้นของ function เราเรียก recursion แบบนี้ว่า head recursion
  - แบ่งงานให้เพื่อนก่อน แล้วต้องรอผลเพื่อมา combine
    - ต้องนำผล จาก `recurse(smallerArguments)` มา combine ถึง return ได้

Tail vs Head Recursions [3]

Tail Recursion

```
void tail(n):
{
   if (n == 1)
      return;
   else
      print(n);

   tail(n-1)
}
```

Head Recursion

```
void head(n):
{
   if (n == 1)
      return;
   else
      head(n-1);

   print(n)
}
```

ผลลัพธ์ของการ traverse array โดยใช้วิธี head vs tail?

Recursion Helper Functions

- ในบางกรณี เราจำเป็นต้อง ส่งต่อ parameter บางตัวเพื่ออำนวยความสะดวกในการทำ recursion ที่ user ไม่จำเป็นต้องทราบ หรือ input เข้ามา
- เช่น กรณี array หากต้องการ recursive call ณ ช่วง index ที่ย่อยลงไปเนื่องจากเป็นผลของการแบ่งปัญหาเป็น subproblem

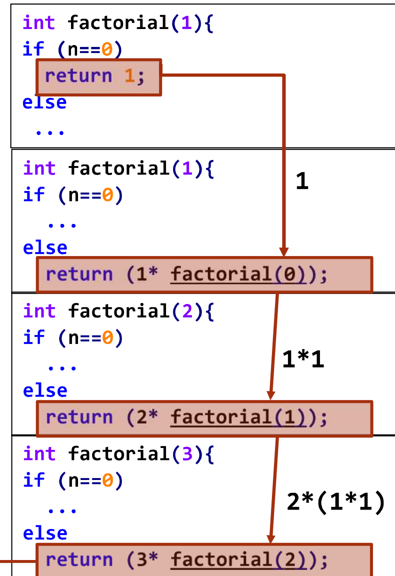
```
USER: processArray(int a[], int lengthA)
HELPER: processArray(int a[], int start, int end, int lengthA)
```


Mathematical Induction

- **Recursive programming is directly related to mathematical induction**
- **The *base case* is to prove the statement true for some specific value or values of N.**
- **The *induction step* -- assume that a statement is true for all positive integers less than N, then prove it is true for N.**

Recursive Memory Stack

```
int factorial(int n){
if (n==0)
  return 1;
else
  return (n* factorial(n-1));
}
```



factorial(3)= 3*(2*(1*1))

Fibonacci Revisited

```
function fib(n)
  if (n < 2)
    # Base case:  fib(0) and fib(1) are both 1
    return 1
  else
    # Recursive case: fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)
    return fib(n-1) + fib(n-2)
  endif

for n ← 1 to 15
  print(fib(n))
endfor
```

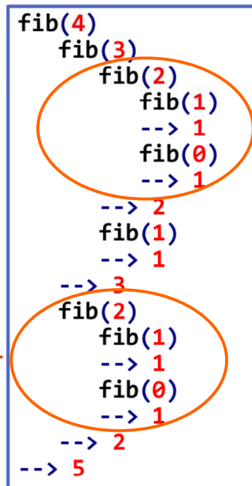
1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610

Fibonacci Revisited [2]

```
int fib(int n, int depth)
{
    int i, result;
    for (i = 0; i < depth; i++)
        printf("   ");
    printf("fib(%d)\n", n);

    if (n < 2)
        result = 1;
    else
        result = fib(n - 1, depth + 1) +
                 fib(n - 2, depth + 1);

    for (i = 0; i < depth; i++)
        printf("   ");

    printf("--> %d\n", result);
    return result;
}
```

ปัญหาบางลักษณะไม่เหมาะกับวิธีแก้ปัญหาแบบ recursion (สังเกตการคำนวณซ้ำ)

```
int main()
{
  int depth = 0;
  fib(4, depth);
  return 0;
}
```



Iteration vs Recursion Example

Iterative

```
function factorial(n)
  factorial = 1
  for i ← 2 to n+1
    factorial *= i
  endfor

  return factorial

print(factorial(5))
```

Recursive

```
function factorial(n)
  if (n < 2)
    return 1
  else
    return n*factorial(n-1)

print factorial(5)
```

Iteration vs Recursion Example [2]

Iterative

```
function gcd(x,y)
  while (y > 0)
    r = x % y
    x = y
    y = r
  endwhile

  return x

print(gcd(1024, 360))
```

Recursive

```
function gcd(x,y)
  if (y == 0)
    return x
  else
    return gcd(y,x % y)
  endif

print(gcd(1024, 360))
```


Iteration vs Recursion Summary

- **Recursion สามารถใช้กับปัญหาใด ๆ ที่สามารถเขียนเป็นรูปแบบการแก้ปัญหาในหน่วยย่อยลงได้**
- **การแก้ปัญหาโดยใช้ Iteration สามารถเขียนให้อยู่ในรูป Recursion ได้**
- **ในการเลือกใช้งานระหว่าง Iterative หรือ Recursive นั้นไม่มีหลักตายตัว**
- **เลือกตามความเหมาะสมของปัญหา**
- **Recursive ไม่จำเป็นต้องเป็นทางเลือกที่ดีกว่าเสมอ**

Iteration vs Recursion Summary [2]

- **Recursion**
  - แบ่งงานเป็นส่วนย่อย ๆ เพื่อแก้ปัญหา
  - ใกล้เคียงกับการนิยามทางคณิตศาสตร์
  - วิธีเขียนสั้นและสวยงามกว่า (**“more elegant”**)
- **Iteration**
  - เป็นการทำงานเดิมซ้ำ ๆ
  - สเต็ปการทำงานเหมือนการเขียนโปรแกรม
  - (อาจจะ) เข้าใจได้ง่ายกว่า

Iteration vs Recursion Summary [3]

	Recursion	Iteration
Elegance	++	--
Performance	--	++
Debugability	--	++

- **Conclusion (for now):**
  Use iteration when practicable. Use recursion when required (for "naturally recursive problems").

When to use Recursion

- หลีกเลี่ยงการใช้ **recursive function** เมื่อมีการใช้ **local arrays** ขนาดใหญ่ **(Recursive** ใช้ **Memory** เยอะ)
- เลือกใช้ **recursion** เมื่อทำให้ลดเวลาการเขียนโปรแกรม หรือทำให้โปแกรมลดความซับซ้อนลงมาก ๆ
- **Recursion** เหมาะสมกับงานประเภทที่ใช้ **Divide-and-conquer algorithm** ในการแก้ปัญหา เช่น **merge sort** และ **binary search**

Reference

- **http://www.kosbie.net/cmu/fall-12/15-112/handouts/notes-recursion/notes-recursion.html**