w04-Lec

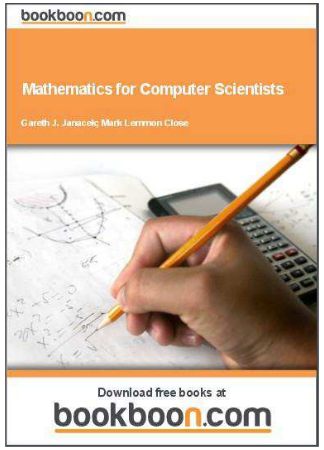
Mathematics and Computer Science: Numbers

Assembled for 204111

by Kittipitch Kuptavanich

Numbers

- **Integers**
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal



Integers

$1, 2, 3, 4, \ldots, 101, 102, \ldots, n, \ldots, 2^{32582657}-1, \ldots$

- **Integer หรือจำนวนเต็ม**
- **เริ่มจากจำนวนนับ (Natural/Counting Number)**
- **Then we add** 0 (zero), **defined as**

$$\boxed{0 + \text{any integer } n = 0 + n = n + 0 = n}$$

- **Negative integer:** $-n$, **defined as**
  - **-n is the number which when added to n gives zero**

$$\boxed{n + (-n) = (-n) + n = 0}$$

Simple Rules for Integers

- **For integers a and b**

1. $a + b = b + a$
2. $a \times b = b \times a$ or $ab = ba$

   (1–2: commutative)

3. $-a \times b = -ab$
4. $(-a) \times (-b) = ab$
5. a^k = shorthand for a multiplied by itself k times.

   $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

   Note: $a^n \times a^m = a^{n+m}$
6. $n^0 = 1$

Numbers

- Integers
- **Factors and Primes**
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

Factors and Primes

- **Many integers are products (ผลคูณ) of smaller integers, for example**

$$2 \times 3 \times 7 = 42$$

- **Here 2, 3 and 7 are called the <u>factors</u> (ตัวประกอบ) of 42**
- **<u>factorization</u> = การแยกตัวประกอบ**

Factors and Primes [2]

- **Not all integers have factors such as**

$$3, 5, 7, 11, 13, \ldots, 2^{216091}-1, \ldots$$

- **These number are called primes (จำนวนเฉพาะ)**
- **พิจารณาการหาร (division)**
  - **ในกรณีหารไม่ลงตัว จะเหลือเศษของการหาร (remainder)**

$$9 = 2 \times 4 + 1$$

Factors and Primes [3]

- **เมื่อนำ 9 มาหารด้วย 4 จะเหลือเศษ 1**

$$9 = 2 \times 4 + 1$$

- **For any integers x and y**

$$y = k \times x + r$$

- **where r is the remainder (เศษของการหาร)**
  - กรณี r เป็น 0 (ศูนย์) เรากล่าวได้ว่า <u>x หาร y ลงตัว</u> (x เป็นตัวหาร)
    - หรือ y <u>หารด้วย</u> x ลงตัว
    - x *divides* y หรือ $x \mid y$ โดยเส้นตั้งใช้แสดงการหารลงตัว
    - เช่น $2 \mid 128$, $7 \mid 49$ (*ตัวหารอยู่ด้านหน้า)
    - กรณี 3 หาร 4 ไม่ลงตัว แทนด้วยสัญลักษณ์ $3 \nmid 4$

$\boxed{\nmid}$

indivisible symbol

Factorization

- ในการหาตัวประกอบของ integer n เรา สามารถใช้วิธีการลองหาร n ด้วยจำนวนเฉพาะ

$$k = 2, 3, 5, 7, 11, 19, \ldots$$

- ถ้า n หารด้วย k ลงตัว $\longrightarrow$ k เป็น factor ของ n
  - ทำการหารอีกครั้งด้วย k
- ถ้า n หารด้วย k ไม่ลงตัว
  - ลองจำนวนเฉพาะตัวถัดไป

Factorization [2]

List of primes: 2, 3, 5, 7, 11, 19, 23, 29……
more at: http://primes.utm.edu/lists/small/1000.txt

- ตัวอย่าง 2394

1. 2394/2 = 1197
2. Can't divide by 2 again so try 3
3. 1197/3 = 399
4. 399/3 = 133
5. Can't divide by 3 again so try 5
6. Can't divide by 5 so try 7
7. 133/7 = 19 (19 is prime so we are done)

$$2394 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 19$$

Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- **Modular Arithmetic**
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

Modular Arithmetic [1]

- **Operator ที่ใช้ในการหาร กรณีสนใจเศษของการหาร คือ modulo หรือ mod**
  - **Operator: % (C/C++, Java, python)**
- **The operator simply gives the remainder after division. For example,**

1. 25 mod 4 = 1 because 25 ÷ 4 = 6 remainder 1.
2. 19 mod 5 = 4 b/c 19 = 3 × 5 + 4.
3. 24 mod 5 = 4.
4. 99 mod 11 = 0.

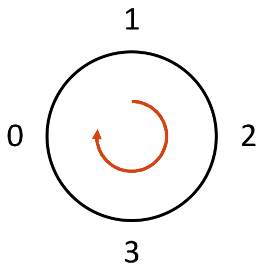
Modular Arithmetic [2]

- **We will ignore cases with negative number for now.**
- **These results can be written in a different ways**

We will use this notation in this class

$$25 = 1 \bmod 4 \text{ OR } 25 \bmod 4 = 1$$

- **Modular arithmetic is sometimes called clock arithmetic.**
- 47 mod 4
  - **Going around 11 times**
  - **And** $\frac{3}{4}$
  - **Stops at** 3



Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- **The Euclidean Algorithm**
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

The Euclidean Algorithm

Euclid

- ในคณิตศาสตร์ ตัวหารร่วมมาก หรือ ห.ร.ม. (อังกฤษ: **greatest common divisor: gcd**) ของจำนวนเต็มสองจำนวนซึ่งไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่หารทั้งสองจำนวนลงตัว เช่น
  - **gcd ของ 15 และ 25 คือ 5**
- **The Euclidean algorithm for finding the gcd is one of the oldest algorithms known, it appeared in Euclid's Elements around 300 BC.**

Image: http://www.glogster.com/codster72011/fun-facts-about-euclid/

Ref: http://th.wikipedia.org/wiki/ตัวหารร่วมมาก

The Euclidean Algorithm [2]

- **Suppose a is an integer smaller than b.**

1. Divide b by a.
2. If the remainder is zero, then b is a multiple of a and we are done. (a is the gcd)
3. If not, divide the divisor a by the *remainder*.
4. Continue dividing the last divisor by the last remainder, until the *remainder* is zero
5. The last non-zero *remainder* is the gcd

The Euclidean Algorithm [3]

- **For example** 246 **and** 72

STEP 1	246	mod	72	=	30
STEP 2	72	mod	30	=	12
STEP 3	30	mod	12	=	6
STEP 4	12	mod	6	=	0

- **So the** gcd **of** 246 **and** 72 **is** 6

The Euclidean Algorithm [4]

- **Now let's try** 1071 **and** 462

STEP 1		mod		=	
STEP 2		mod		=	
STEP 3		mod		=	

- **So the gcd is** $\boxed{}$

Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- **Rational and Reals**
- Ceiling and Floor functions
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

Rationals and Reals

- **A rational number (จำนวนตรรกยะ) is a number that can be written as $\frac{P}{Q}$ where P and Q are integers. Examples are:**

$$\frac{1}{2} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{7}{11} \quad \frac{7}{6}$$

- **For every integer n, except zero, there is an inverse (อินเวอร์ส), written $\frac{1}{n}$ which has the property that**

$$n \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times n = 1$$

- **multiplying $\frac{1}{n}$ by m gives a fraction $\frac{m}{n}$. These are called rational numbers**

Rationals and Reals [2]

- นอกจากนี้ ยังมีตัวเลขที่ไม่ใช่ทั้งจำนวนเต็ม และไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เช่น $\sqrt{2}$ ที่ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเศษส่วนได้ เรียกว่า จำนวนอตรรกยะ (irrational numbers)
- จำนวนจริง (real numbers)
  - Irrational: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$
  - Rational: -3.4, $\frac{3}{4}$, 9.454545…,…
  - Integer: -2, 5, -9, 0, …
  - Whole: 0, 1, 2, 3, …
  - Natural: 1, 2, 3, …

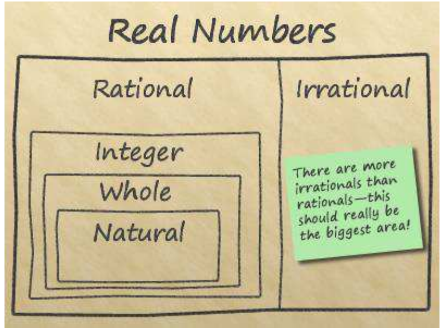


Image: http://leferemath.weebly.com/rational-numbers.html

Notations

เครื่องหมายอื่น ๆ

- If x is less than (น้อยกว่า) y
  - then we write $x < y$. If there is a possibility that they might be equal then $x \leq y$ (น้อยกว่าหรือเท่ากับ)
  - We can also write $y > x$ or $y \geq x$
    - y is greater than (มากกว่า) x or greater than or equal to (มากกว่าหรือเท่ากับ) x

Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- **Ceiling and Floor functions**
- Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal

Notations [2]

- Floor function (ฟังก์ชันพื้น) of a real number x, denoted by $\lfloor x \rfloor$ or `floor(x)`, เป็นฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ x เช่น
  - `floor(2.7)` หรือ $\lfloor 2.7 \rfloor$ มีค่าเท่ากับ 2 $\lfloor 5 \rfloor$ มีค่าเท่ากับ 5
  - แต่ `floor(-3.6)` หรือ $\lfloor -3.6 \rfloor$ มีค่าเท่ากับ -4
  - ปัดลงไปทางด้านซ้ายของเส้นจำนวนหากไม่ใช่ integer
- Ceiling function (ฟังก์ชันเพดาน) $\lceil x \rceil$ ทำหน้าที่ตรงข้ามกับ floor
  - `ceiling(2.7)` หรือ $\lceil 2.7 \rceil$ มีค่าเท่ากับ 3
  - ปัดขึ้นไปทางด้านขวาของเส้นจำนวนหากไม่ใช่ integer

Notations [3]

- **The absolute value (ค่าสัมบูรณ์ หรือ *modulus*) of x written $|x|$ is just x when $x \geq 0$ and $-x$ when $x < 0$ so $|2| = 2$ and $|-6| = 6$**
- **The famous result about the absolute value is that for any x and y**

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Notations [4]

- **We met a^b when we discussed integers and in the same way we can have x^y when x and y are not integers e.g. $2.5^{3.67}$ or $0.25^{1/2}$**
- **Note however that**

$a^0 = 1$ for all a except zero
$0^b = 0$ for all values of b where $b > 0$
0^0 is undefined mathematically (in C you might get 1)

Numbers

- Integers
- Factors and Primes
- Modular Arithmetic
- The Euclidean Algorithm
- Rational and Reals
- Ceiling and Floor functions
- **Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal**

Number Systems

- **ระบบจำนวนที่เราคุ้นเคยและพบมากที่สุดในชีวิตประจำวันคือเลขฐาน 10 (Decimal System)**
- 3459 **is shorthand (รูปย่อ) for**

$$3 \times 1000 + 4 \times 100 + 5 \times 10 + 9$$

OR

$$3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 9 \times 10^0$$

- **ตำแหน่ง (position) ของตัวเลขมีความสำคัญ**

Number Systems [2]

- เราทราบว่า $10^3 = 1000$ กรณีเลขยกกำลังเป็นจำนวนลบ (negative) เช่น 10^{-3} หมายถึงเศษส่วนในรูป $\frac{1}{10^3}$
- ในเลขฐานสิบ เราใช้จุดทศนิยม (Decimal Point) และตำแหน่งตัวเลขหลังจุดทศนิยมเพื่อแสดงเศษส่วนในกรณีที่มีส่วนเป็น 10^n
- เราสามารถเขียน 123.456 ในรูป

$$1 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0 + . + 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3}$$

Decimal Point

Number Systems [3]

- **Today the common number systems are**
  - **Decimal number system: ใช้สัญลักษณ์ 0 – 9; ฐาน (base) 10**
  - **Binary number system: ใช้สัญลักษณ์ 0,1; ฐาน 2**
  - **Hexadecimal number system: ใช้สัญลักษณ์ 0-9 และ A-F; ฐาน 16**
    - here $A \equiv 10$, $B \equiv 11$, $C \equiv 12$, $D \equiv 13$ $E \equiv 14$, $F \equiv 15$.
  - **Octal number system: ใช้สัญลักษณ์ 0-7; ฐาน 8**

Binary

- เช่นเดียวกันกับในกรณีเลขฐาน 10 ที่ตำแหน่งแต่ละตำแหน่งแทน 10^n ในระบบเลขฐานสอง แต่ละตำแหน่งแทนด้วย 2^n

Decimal number		in powers of 2	power of 2: 3	2	1	0	Binary number
8	=	2^3	1	0	0	0	1000
7	=	$2^2+2^1+2^0$	0	1	1	1	111
6	=	2^2+2^1	0	1	1	0	110
5	=	2^2+2^0	0	1	0	1	101
4	=	2^2	0	1	0	0	100
3	=	2^1+2^0	0	0	1	1	11
2	=	2^1	0	0	1	0	10
1	=	2^0	0	0	0	1	1

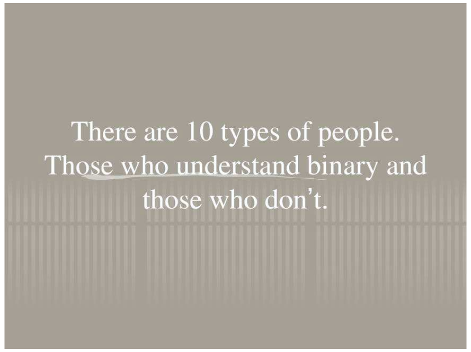
Binary Conversion

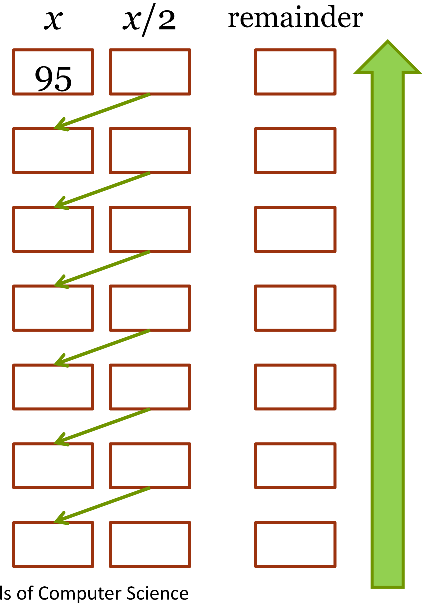
- เราสามารถใช้ modulo (การหารเอาเศษ) ในการเปลี่ยนเลขฐาน 10 เป็นเลขฐาน 2 ตัวอย่างเช่น 88
- เมื่อ x/2 = 0 ให้เขียน column สุดท้ายจากล่างขึ้นบน
- จะได้ว่า
  - $88_{10} = 1011000_2$
- วิธีนี้สามารถใช้ แปลงเลขฐาน 10 เป็นฐานอื่น ๆ เช่นกัน

x	x/2	remainder
88	44	0
44	22	0
22	11	0
11	5	1
5	2	1
2	1	0
1	0	1

Binary Conversion [2]

- **Let's try with 95**
- **95_{10} = $\boxed{}_2$**





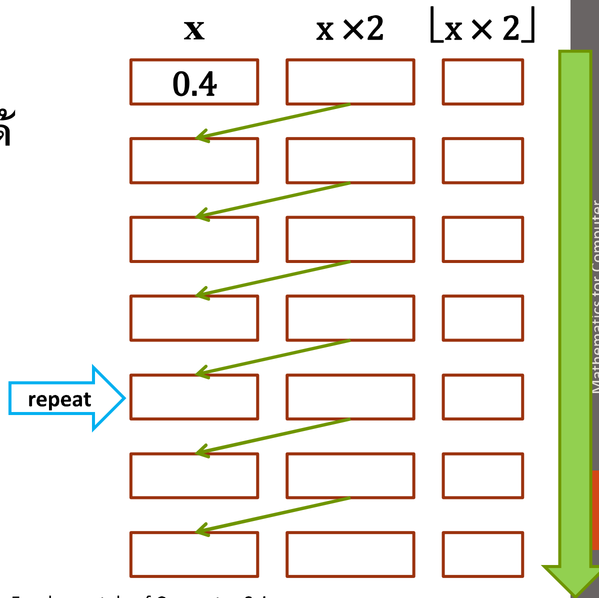
Binary Decimals

- **การเปลี่ยนเลขทศนิยมจากฐาน 10 เป็น ฐาน 2 เราจะใช้ฟังก์ชัน floor**
- **เมื่อ x × 2 = 1 ให้เขียน column สุดท้ายจากบนลงล่าง**
- **จะได้ว่า**
  - **$0.6875_{10} = 0.1011_2$**

x	x ×2	⌊x × 2⌋
0.6875	1.375	1
0.375	0.75	0
0.75	1.5	1
0.5	1	1

Binary Decimals [2]

- **Let's try with 0.4**
- **ในบางกรณีเราจะได้ทศนิยมไม่รู้จบ**
- **0.4_{10} =** $\boxed{}_2$



Addition in Binary

0+0 = 0
0+1 = 1
1+1 = 10 (เนื่องจาก 1 + 1 มีค่าเกิน 1 ใส่ 0 และ ทดไปหลักถัดไป)
1+1+1 = 1+(1+0) =1+10 =11

- **การบวกเลขในเลขฐาน 2 มีลักษณะคล้ายในฐาน 10**

$$\begin{array}{rrrrrrrl} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ + & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \text{Sum} \\ & \uparrow & & & \uparrow & & & \end{array}$$

ตำแหน่งที่เกิดการทดเลข

Subtraction in Binary

	1	1	0	1	0	1	
-	1	0	1	1	1	0	
	0	0	0	1	1	1	difference

- การลบเลขในเลขฐานสองมีลักษณะคล้ายในฐาน 10 หากตัวตั้งในหลักใด ๆ ไม่พอสำหรับการลบ ก็ให้ "ขอยืม" จากหลักถัดไป

Multiplication in Binary

การคูณเลขฐาน 10

			1	2	5	6	7	8	ตัวตั้ง
$\times$						3	8	7	ตัวคูณ
			8	7	9	7	4	6	คูณ 7
	1	0	0	5	4	2	4		ขยับซ้าย 1 ตำแหน่งแล้วคูณ 8
	3	7	7	0	3	4			ขยับซ้าย 2 ตำแหน่งแล้วคูณ 3
	4	8	6	3	7	3	8	6	ผลบวกสามบรรทัด

การคูณเลขฐาน 2

			1	0	0	1	1	1	0	Multiplicand
$\times$							1	0	1	Multiplier
			1	0	0	1	1	1	0	times 1
		0	0	0	0	0	0	0		Shift left one and times 0
	1	0	0	1	1	1	0			Shift left two and times 1
	1	1	0	0	0	0	1	1	0	Add to get the product

Tips

<u>ข้อสังเกต</u>

$111_2 = 7$ and $111_2 \times 2 = 14 = 1110_2$

$101_2 = 5$ and 101_2 x $2 = 10 = 1010_2$

- การคูณเลขใด ๆ ในฐาน 2 ด้วย 2 ให้ขยับเลขนั้นไปทางซ้าย 1 ตำแหน่งแล้วเติม 0

Octal

- การเปลี่ยนเลขฐาน 2 เป็นฐาน 8 (= 2^3) ให้แบ่งเลขฐานเป็นกลุ่ม กลุ่มละ <u>3</u> ตัวเริ่มจากหลัก 2^0
- เช่น 11000010001
- แล้วจึงเปลี่ยนเลขในแต่ละกลุ่มเป็นค่าในฐาน 10 (0-7)

```
0 = 000
1 = 001
2 = 010
3 = 011
4 = 100
5 = 101
6 = 110
7 = 111
```

11<u>000</u>010<u>001</u>

11 000 010 001

3 0 2 1

Hexadecimal

- การเปลี่ยนเลขฐาน 2 เป็นฐาน 16 (= 2^4) ให้แบ่งเลขฐานเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 ตัวเริ่มจากหลัก 2^0
- เช่น 01011110101101010010
- แล้วจึงเปลี่ยนเลขในแต่ละกลุ่มเป็นค่าในเลขฐาน 16

```
A = 10
B = 11
C = 12
D = 13
E = 14
F = 15
```

1011110101101010010

101 1110 1011 0101 0010

5 14 11 5 2

5EB52

Final Notes

[Math] is a little like programming, it takes time to understand a lot of code and you never understand how to write code by just reading a manual - you have to do it! Mathematics is exactly the same, you need to do it.

Summary

- **Integers**
- **Factors and Primes**
- **Modular Arithmetic**
- **The Euclidean Algorithm**
- **Rational and Reals**
- **Ceiling and Floor functions**
- **Number Systems: decimal, binary, octal, hexadecimal**