

201110 Intrgrated Math SC

อ.ดร. ณัฐวัชร สอนธิชัย

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

หัวข้อ 1

ระบบสมการเชิงเส้น
(System of Linear Equations)

System of Linear Equations

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ n ตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

สามารถเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow$$



System of Linear Equations

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ n ตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

สามารถเขียนเป็นสมการเมทริกซ์ ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow AX = B$$



การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น



การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

- 1 มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว



การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

- 1 มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว
- 2 มีจำนวนคำตอบเป็นอนันต์



การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

- 1 มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว
- 2 มีจำนวนคำตอบเป็นอนันต์
- 3 ไม่มีคำตอบ



Gauss-Jordan Method



1 สร้าง เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

$$[A | B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$



1 สร้าง เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

$$[A | B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

2 จากเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการข้างต้น ใช้

การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว \implies เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปแบบแถว



1 สร้าง เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented Matrix)

$$[A | B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right)$$

2 จากเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการข้างต้น ใช้

การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว \implies เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปแบบแถว

3 เมื่อได้เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปแบบแถว แล้วให้แปลงเมทริกซ์อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น ก็จะได้คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นดังกล่าว



การดำเนินการเบื้องต้นแบบแถว (Elementary Row Operation)



- 1 สลับแถว 2 แถวใดๆ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r'_1 = r_3 \\ r'_3 = r_1 \end{array}$$



- 1 สลับแถว 2 แถวใดๆ

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} r'_1 = r_3 \\ r'_3 = r_1 \end{array}$$

- 2 คูณแถวหนึ่งแถวใดด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} r'_3 = \frac{r_3}{2}$$



- 3 เอาค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์คูณกับแถวหนึ่งแล้วบวกเข้ากับอีกแถวหนึ่ง

$$r'_i = r_i + cr_j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} r'_2 = r_2 + 2r_1$$



3. เอาค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์คูณกับแถวหนึ่งแล้วบวกเข้ากับอีกแถวหนึ่ง

$$r'_i = r_i + cr_j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & & \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad r'_2 = r_2 + 2r_1$$



3. เอาค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์คูณกับแถวหนึ่งแล้วบวกเข้ากับอีกแถวหนึ่ง

$$r'_i = r_i + cr_j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad r'_2 = r_2 + 2r_1$$



3. เอาค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์คูณกับแถวหนึ่งแล้วบวกเข้ากับอีกแถวหนึ่ง

$$r'_i = r_i + cr_j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad r'_2 = r_2 + 2r_1$$



เมทริกซ์ขั้นบันไดแบบแถว (Row Reduce Echelon Matrix)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Example

จงแก้ระบบสมการ

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$x_2 - x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_3 = 8$$

