

5. เมทริกซ์ผกผัน (Inverse Matrix)

นิยาม ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส และ $AB = BA = I$ แล้วเราจะกล่าวว่า A เป็นอินเวอร์สของเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A = B^{-1}$ หรือ B เป็นอินเวอร์สของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

$$\text{นั่นคือ } AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

$$\text{ตัวอย่าง } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{ดังนั้น } B = A^{-1}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\text{ดังนั้น } A = B^{-1}$$

การหาอินเวอร์สเมทริกซ์ สามารถหาได้ 2 วิธี คือ

1. หาโดยอาศัยแอดจอยด์เมทริกซ์
2. หาโดยใช้การแปลงตามแถว

1. หาโดยอาศัยแอดจอยด์เมทริกซ์

แอดจอยด์เมทริกซ์ (Adjoint Matrix) คือเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกเป็นโคแฟกเตอร์ของสมาชิกในเมทริกซ์จัตุรัส A ใช้สัญลักษณ์

$$Adj A = [Cof A]^T$$

$$\text{ตัวอย่าง จงหา } Adj A \text{ เมื่อ } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\text{วิธีทำ } Cof A = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$Adj A = [Cof A]^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

หลักการหาอินเวอร์สเมตริกซ์

$$A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|} \quad \text{เมื่อ} \quad |A| \neq 0$$

Inverse Matrix 5/19

ตัวอย่าง จงหา A^{-1} เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

วิธีทำ $Cof A = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$ $Adj A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$|A| = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{Adj A}{|A|} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

ตรวจสอบ

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ab \\ cd - cd & -bc + ad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Inverse Matrix 6/19

หมายเหตุ

- เมตริกซ์จัตุรัสใดๆ อาจจะมีหรือไม่มีอินเวอร์สเมตริกซ์ก็ได้
- ถ้าเมตริกซ์ A เป็น Singular Matrix จะไม่มีอินเวอร์ส เพราะ $|A| = 0$ และถ้าเมตริกซ์ A เป็น Non-Singular Matrix จะมีอินเวอร์ส เพราะ $|A| \neq 0$
- เนื่องจากการหาอินเวอร์สเมตริกซ์ โดยอาศัยแอดจอยด์เมตริกซ์นี้ กรณีที่เมตริกซ์มีอันดับสูงจะใช้เวลาในการหามาก จึงไม่สะดวกในการทำ

บางกรณีอาจจะพบสัญลักษณ์เมตริกซ์ยกกำลังติดลบ ในที่นี้หมายถึงจำนวนเท่าของอินเวอร์สเมตริกซ์

เช่น $A^{-2} = (A^{-1})^2 = A^{-1}A^{-1}$

$$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1} \quad \text{เมื่อ} \quad n \geq 2$$

Inverse Matrix 7/19

2. หาโดยใช้การแปลงเชิงแถว

การแปลงเบื้องต้น (Elementary Transform)

การแปลงเบื้องต้น หมายถึงการดำเนินการกับเมตริกซ์อย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

- การสลับที่ระหว่างแถวสองใดๆ หรือสองสดมภ์ใดๆ การสลับแถวที่ i กับแถวที่ j เขียนแทนด้วย $R(i, j)$ และการสลับสดมภ์ที่ i กับสดมภ์ที่ j เขียนแทนด้วย $C(i, j)$
- การคูณแถวใดแถวหนึ่ง หรือสดมภ์ใดสดมภ์หนึ่งด้วยค่าคงที่ $k \neq 0$ การคูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ i เขียนแทนด้วย kR_i และการคูณสมาชิกทุกตัวในสดมภ์ที่ i เขียนแทนด้วย kC_i

Inverse Matrix 8/19

3. การบวกแถวที่คูณกับแถวอื่น หรือสดมภ์ที่คูณกับสดมภ์อื่น การบวกแถวที่ i ด้วย k เท่าของแถวที่ j เขียนแทนด้วย $R_i + kR_j$ และการบวกสดมภ์ที่ i ด้วย k เท่าของสดมภ์ที่ j เขียนแทนด้วย $C_i + kC_j$

เรียกการแปลงที่ใช้แถว ว่าการแปลงแถวเบื้องต้น (Elementary Row Transformation) และเรียกการแปลงที่ใช้สดมภ์ ว่าการแปลงสดมภ์เบื้องต้น (Elementary Column Transformation)

เมตริกซ์สมมูล (Equivalent Matrix)

ถ้าเมตริกซ์ A ถูกเปลี่ยนรูปเป็นเมตริกซ์ B โดยการดำเนินการแปลงที่กล่าวมาแล้ว และใช้สัญลักษณ์ $A \approx B$ เรียกเมตริกซ์ A สมมูลกับเมตริกซ์ B

ตัวอย่าง ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

เปลี่ยนเมตริกซ์ให้อยู่ในรูปใหม่จะได้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{2R_1+R_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{9}R_2}{\approx} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์เบื้องต้น หรือเมตริกซ์ธาตุมูล (Elementary Matrix)

เมตริกซ์เบื้องต้น หรือเมตริกซ์ธาตุมูล คือเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยการดำเนินการเปลี่ยนแปลงเชิงแถว เรียกเมตริกซ์ที่ได้ว่าเมตริกซ์ธาตุมูลเชิงแถว

(Elementary Row Matrix) ใช้สัญลักษณ์ E

ส่วนการดำเนินการเปลี่ยนแปลงเชิงสดมภ์ เรียกเมตริกซ์ที่ได้ว่าเมตริกซ์ธาตุมูลเชิงสดมภ์ (Elementary Column Matrix) ใช้สัญลักษณ์ T

ตัวอย่าง $E_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ หมายถึงเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยการ

สลับแถวที่สามกับแถวที่หนึ่ง

$$T_1(2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ หมายถึงเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยการ}$$

คูณสดมภ์ที่หนึ่งด้วย 2

$$E_{13}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ หมายถึงเมตริกซ์ที่ได้จากเมตริกซ์เอกลักษณ์}$$

โดยการนำแถวที่หนึ่งลบด้วย 2 เท่าของแถวที่สาม

หมายเหตุ

1. ทุกๆเมตริกซ์จัตุรัสเป็นเมตริกซ์ ซึ่งมีไข่ออกฐาน (Non-Singular Matrix)
2. ถ้าใช้การดำเนินการเปลี่ยนเชิงแถวกับเมตริกซ์ A ก็ต้องนำเมตริกซ์จัตุรัสที่สอดคล้องคูณข้างหน้าเมตริกซ์ A
3. ถ้าใช้การดำเนินการเปลี่ยนเชิงสลับกับเมตริกซ์ A ก็ต้องเอาเมตริกซ์จัตุรัสที่สอดคล้องคูณข้างหลังเมตริกซ์ A

ตัวอย่าง ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R(1,2)} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = B$

ดังนั้น $E_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = B$

หลักการหาอินเวอร์สเมตริกซ์

1. สร้างเมตริกซ์แต่งเติม $[A:I]$ โดยที่ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ที่มีอันดับเท่ากับเมตริกซ์ A
2. ใช้การดำเนินการแบบแถวหรือสลับกับเมตริกซ์แต่งเติม $[A:I]$ จนได้เมตริกซ์ในรูป $[I:B]$ นั่นคือ $[A:I] \approx [I:B]$ ดังนั้น $B = A^{-1}$

ตัวอย่าง จงหาอินเวอร์สเมตริกซ์ของเมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ $[A:I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $\approx R_2 + R_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $\approx R_3 - R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
 $\approx R_1 - 2R_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & \vdots & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} &\approx R_2 - 2R_3 \\ &\approx R_1 + 3R_3 \end{aligned} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & -4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] = [I:B]$$

$$\text{ดังนั้น } A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ

ถ้าไม่สามารถแปลงเมทริกซ์ $[A:I]$ ให้เป็นเมทริกซ์ $[I:B]$ โดยวิธีการแปลงเชิงแถวได้ แสดงว่าเมทริกซ์ A ไม่มีอินเวอร์ส

คุณสมบัติของอินเวอร์สเมทริกซ์

ให้ เมทริกซ์ A เมทริกซ์ B และเมทริกซ์ C เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n

1. เมทริกซ์ใดๆจะมีอินเวอร์สเมทริกซ์เพียงเมทริกซ์เดียว
2. ถ้าผลคูณของสองเมทริกซ์จัตุรัสเท่ากับ I_n จะได้ว่า การคูณนั้นสลับที่กันได้ คือถ้า $AB = I_n$ จะได้ว่า $BA = I_n$
3. ถ้าเมทริกซ์ A มีอินเวอร์ส จะได้ว่า $AB = AC$ นั่นก็คือ $B = C$
4. ถ้าเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B หาอินเวอร์สได้ จะได้ว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
5. ถ้าเมทริกซ์ A มีอินเวอร์ส จะได้ว่า $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

6. ถ้าเมทริกซ์ A มีอินเวอร์ส จะได้ว่า $(A^{-1})^{-1} = A$

7. $AB = O$ จะได้ว่า $A = O$ หรือ $B = O$ หรือทั้งเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B ไม่สามารถหาอินเวอร์สได้

8. ดีเทอร์มิแนนต์ของอินเวอร์สเมทริกซ์จะเป็นส่วนกลับกับดีเทอร์มิแนนต์ของ

เมทริกซ์นั้น นั่นคือ $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

9. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ เมื่อ $c \neq 0$ เป็นสเกลลาร์