Algorithm Design and Analysis

บทที่ 10

Network flow Part II

อ. ดร. จักริน ชวชาติ
อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

Greedy

หา st-path ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี Flow $f(e) \leq$ Capacity $c(e)$ จากนั้นaugment flow ตาม path นั้น

ลักษณะการทำงานของ Greedy คือ ทำซ้ำจนหา path เพิ่มไม่ได้

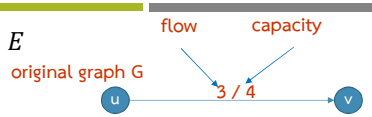
ข้อเสียคือ การที่จะทำให้ได้ดีที่สุดต้อง backtrack

อ. ดร. จักริน ชวชาติ
อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

Residual graph

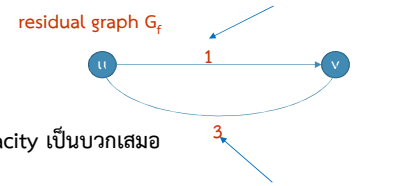
Original edge: $e = (u, v) \in E$

- Flow $f(e)$
- Capacity $c(e)$



Residual edge:เพิ่มเส้นย้อนกลับกับ flow ที่ถูกส่ง

- $e = (u, v)$และ$e^R = (v, u)$
- Residual graph:
  - ทุกเส้นเชื่อมจะมี residual capacity เป็นบวกเสมอ

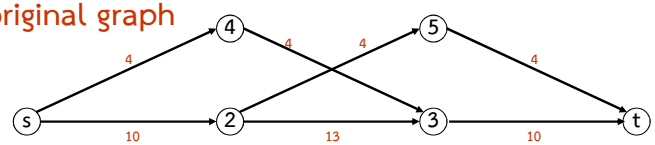


อ. ดร. จักริน ชวชาติ
อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

Augmenting paths

Augmenting path คือ st-path ใน residual graph

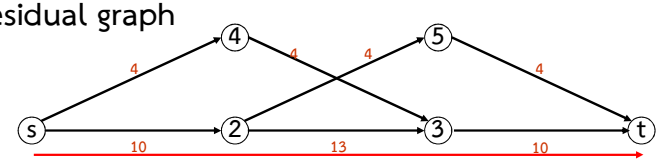
- จะเพิ่ม flow ไปตาม forward edges (ตามทิศทางของเส้นเชื่อม)
- จะลด flow ไปตาม backward edges (ตามทิศย้อนเส้นเชื่อม)



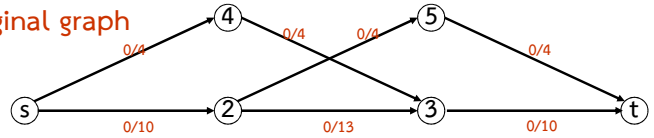
อ. ดร. จักริน ชวชาติ
อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

Augmenting paths

residual graph

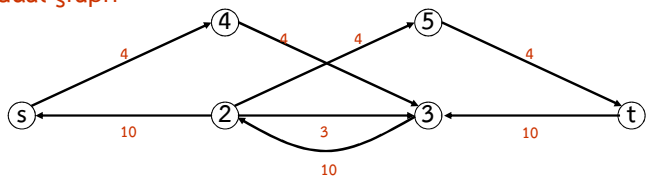


original graph



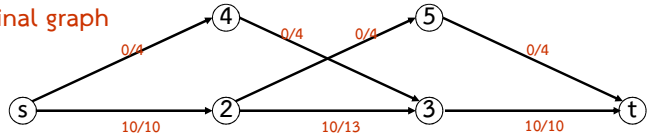
Augmenting paths

residual graph



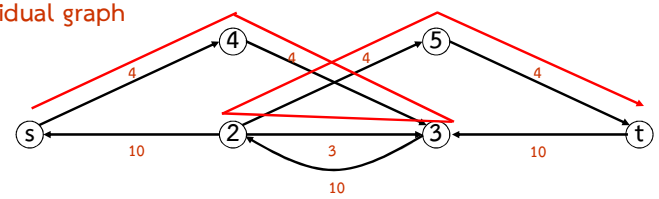
ณ จุดนี้ หากเป็น greedy จะทำต่อไม่ได้

original graph

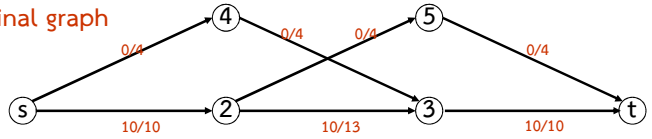


Augmenting paths

residual graph

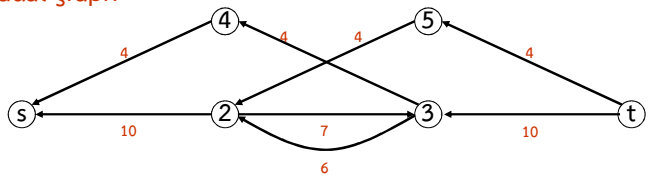


original graph

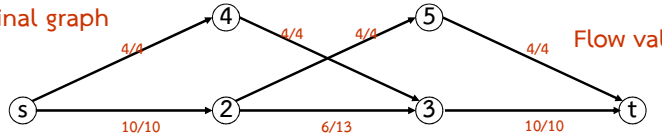


Augmenting paths

residual graph



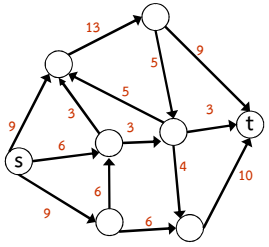
original graph



Flow value=14

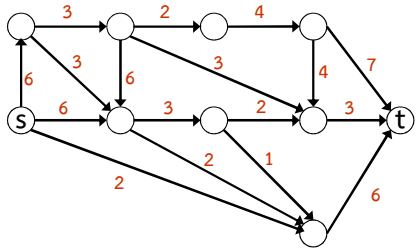
แบบฝึกหัดครั้งที่ 8 ข้อ 1

- ให้หาค่า max flow ที่ได้ โดยวิธีการหา Augmenting paths และการสร้าง Residual graph (ให้แสดงวีธีหา Mincut ของโจทย์ทั้งสองข้อนี้ด้วย)



แบบฝึกหัดครั้งที่ 8 ข้อ 2

- ให้หาค่า max flow ที่ได้ โดยวิธีการหา Augmenting paths และการสร้าง Residual graph (ให้แสดงวีธีหา Mincut ของโจทย์ทั้งสองข้อนี้ด้วย)



Ford-Fulkerson Augmenting Path Algorithm

while(there exists an augmenting path){

Find augmenting path P

Compute bottleneck capacity of P

Augment flow along P

}

คำถาม

Q:การทำเช่นนี้ทำให้ได้ max flow ใช่หรือไม่

A:ใช่

Ford-Fulkerson Algorithm: Analysis

Assumption: ให้ความจุมีค่าเป็นจำนวนเต็ม

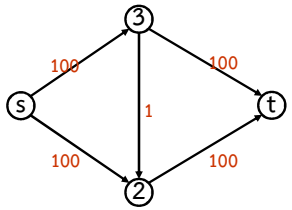
ในแต่ละรอบการทำงานจะมีการหา st-path ซึ่งใช้เวลาในการทำงาน O(N+M)

เราจะส่ง flow อย่างน้อย 1 หน่วยผ่าน path นี้

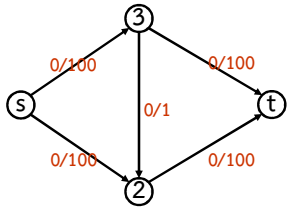
ถ้า max-flow มีค่าเป็น f* แล้วเวลาในการทำงานของอัลกอริทึมมีค่าเป็น O((N+M)*|f*|)

Choosing Good Augmenting Path

residual graph

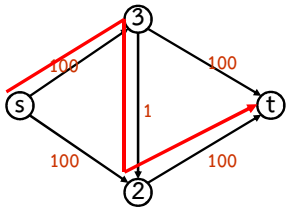


original graph

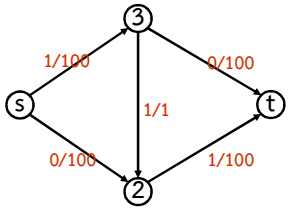


Choosing Good Augmenting Path

residual graph

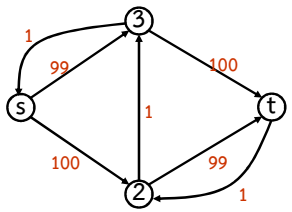


original graph

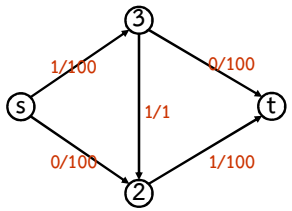


Choosing Good Augmenting Path

residual graph

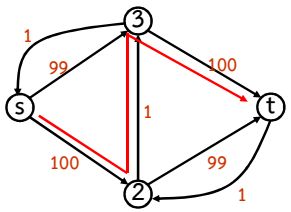


original graph

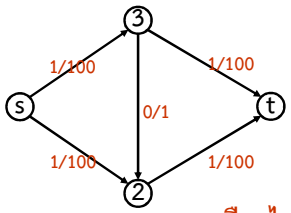


Choosing Good Augmenting Path

residual graph



original graph



หากเลือกไม่ได้ต้องทำถึง 200 รอบ

Choosing Good Augmenting Path

ควรระวังในการเลือก augmenting path

- การเลือกบางวิธีทำให้ได้ exponential algorithm
- การเลือกบางวิธีทำให้ได้ polynomial algorithm

ออกแบบรูปแบบของ augmenting path ที่อยากได้

- หา augmenting path ได้อย่างมีประสิทธิภาพ
- ทำจำนวนรอบที่น้อย

เลือก augmenting path ด้วยวิธี

- ใช้จำนวนเส้นเชื่อมที่น้อยที่สุด (shortest path)
- เลือกเส้นที่ bottleneck capacity ใหญ่สุด (fattest path)

Shortest augmenting path

หาได้ง่าย สามารถใช้ BFS ได้

หา augmenting path ที่มีจำนวนเส้นเชื่อมน้อยที่สุด

ในแต่ละรอบความยาวของ shortest augmenting path จะเพิ่มขึ้น

- ความยาวเพิ่มไม่เกิน E
- ไม่เกิน EV augmenting path ทั้งหมด
- ดังนั้นเวลาในการทำงานเป็น $O(E^2V)$

Fattest augmenting path

หา augmenting path ที่มี bottleneck capacity ที่มีค่ามากที่สุด

ส่ง flow ไปยัง sink

solve โดยใช้ dijkstra-style (Priority-first search) algorithm

การหา fattest path ใช้ O(E log V) ต่อการ augment โดยใช้ binary heap

การหา min-cut

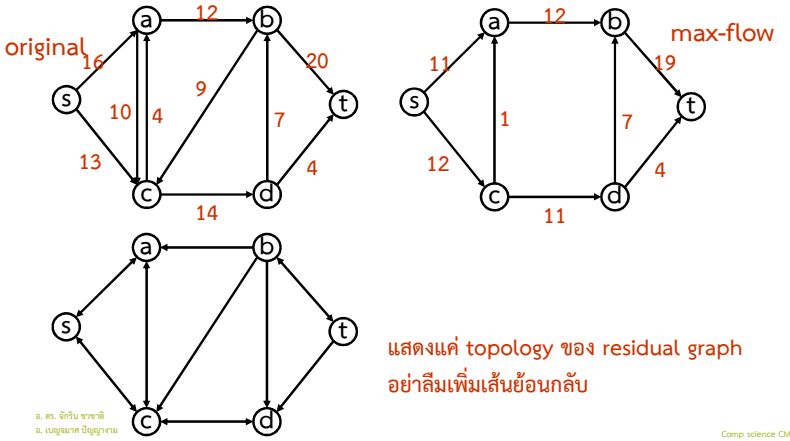
- เรารู้ว่า max flow – min cut
- ตอนนี้เรารู้วิธีการหา max flow

Q: เราจะหา min-cut ได้อย่างไร

A: เราจะใช้ residual graph

การหา min-cut

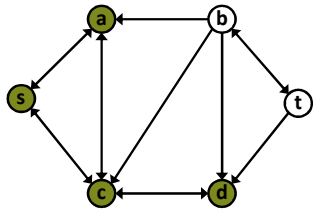
- เราจะลบ max flow ออกจาก original graph



แสดงแค่ topology ของ residual graph
อย่าลืมเพิ่มเส้นย้อนกลับ

การหา min-cut จาก topology ของ residual graph

- mark ทุกโหนดที่ไปถึงจาก s
  - เรียก set ของโหนดที่ไปถึงจาก s ว่า A



แยกโหนดเหล่านี้ออกจากกลุ่ม
เส้นเชื่อมที่วิ่งจาก A ไปยัง V-A คือ cut นั่นเอง

การหา min-cut

- พิจารณาใน original graph เพื่อให้ cut